

Vorlesungsskript Funktionentheorie II

Sommersemester 2023

RWTH Aachen

BW

Inhaltsverzeichnis

1	Ganze Funktionen	5
1.1	Motivation	5
1.2	Unendliche Produkte	6
1.2.1	Unendliche Produkte komplexer Zahlen	6
1.2.2	Absolute Konvergenz	9
1.2.3	Unendliche Produkte holomorpher Funktionen	10
1.3	Weierstraßscher Produktsatz	13
1.3.1	Weierstraßscher Produktsatz	13
1.3.2	Produktentwicklung des Sinus	16
1.4	Partialbruchzerlegung	18
1.5	Funktionen endlicher Ordnung	21
1.5.1	Ordnung und Maximalbetrag	21
1.5.2	Anzahlfunktion und Konvergenzexponent	25
1.6	Der Produktsatz von Hadamard	29
2	Die Gamma-Funktion	33
2.1	Die Gauß-Darstellung der Gamma-Funktion	33
2.2	Die Produktentwicklungen von Euler und Weierstraß	36
2.3	Eulers Integraldarstellung	39
2.4	Die Stirling-Approximation	41
2.4.1	Exkurs: Die Summenformel von Abel–Plana	41
2.4.2	Die Stirling-Formel	44
2.5	Die Multiplikationsformel	49
2.6	Das Schlüsselloch-Integral	51
2.7	Charakterisierungssätze	54
3	Die Laplace-Transformation	56
3.1	Die Laplace-Transformation	56
3.1.1	Definition	56
3.1.2	Konvergenz	58
3.1.3	Rechenregeln	60
3.2	Die Umkehrformel	62
3.2.1	Satz von Lerch	62
3.2.2	Die Umkehrformel	65
3.2.3	Anhang: Beweis vom Lemma	69

3.3	Ein Stetigkeitssatz	71
3.4	Randverhalten	72
3.5	Die Mellin-Transformation	78
4	Die Zeta-Funktion	81
4.1	Definition und Funktionalgleichung	81
4.2	Das Hadamard-Produkt	86
4.3	Die exakte Formel	89
4.4	Der Primzahlsatz	95
5	Elliptische Funktionen	99
5.1	Ein Spielbeispiel	99
5.1.1	Der Arkussinus	99
5.1.2	Periodische Funktionen	103
5.2	Elliptische Integrale	106
5.3	Elliptische Funktionen	109
5.3.1	Perioden und Gitter	109
5.3.2	Die Liouville'schen Sätze	112
5.4	Die Weierstraß'sche elliptische Funktion	117
5.4.1	Konstruktion einer elliptischen Funktion	117
5.4.2	Die Weierstraß-Gleichung	120
5.5	Die j -Invariante	122
5.5.1	Das Doppelverhältnis	123
5.5.2	Die j -Invariante	125
5.6	Der Körper der elliptischen Funktionen	129
5.7	Additionssätze	131
6	Modulformen	136
6.1	Gitterfunktionen	136
6.2	Der Fundamentalbereich	139
6.3	Modulformen	143
6.3.1	Modulformen	143
6.3.2	Eisensteinreihen	146
6.3.3	Die Diskriminante	149
6.3.4	Die j -Invariante	150
6.4	Der Struktursatz	152
6.4.1	Nullstellen von E_4 und E_6	152
6.4.2	Der Struktursatz	154
6.4.3	Die Valenzformel	157
6.5	Die Lambda-Funktion	159
6.5.1	Die Weierstraß'schen Halbperioden-Werte	159
6.5.2	Die Lambda-Funktion	163
6.5.3	Der Satz von Picard	165
6.6	Thetafunktionen	168
6.6.1	Theta-Transformationsformel	168

6.6.2	Der Vier-Quadrate-Satz	171
6.6.3	Das Jacobi-Tripelprodukt	174

1. Ganze Funktionen

1.1. Motivation

Die Nullstellen eines Polynoms, zusammen mit ihren Vielfachheiten, bestimmen das Polynom bis auf einen Vorfaktor eindeutig (Fundamentalsatz der Algebra).

Als Funktionentheoretiker können wir uns mindestens zwei Fragen dazu stellen.

- (i) Inwiefern sind ganze Funktionen durch ihre Nullstellen bestimmt?
- (ii) Das Wachstum von einem Polynom $p(z)$ bei $z \rightarrow \infty$ ist durch die Anzahl seiner Nullstellen bestimmt:

$$p \text{ hat } N \text{ komplexe Nullstellen} \Leftrightarrow p \text{ hat Grad } N \Leftrightarrow p \text{ wächst wie } z^N.$$

Kann man etwa das Wachstumsverhalten einer ganzen Funktion von der Verteilung ihrer Nullstellen ablesen?

Motivation. Eulers erster Beweis (1735) der Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

verläuft ungefähr wie folgt.

Ist p ein Polynom vom Grad n mit $p(0) = 1$ und hat p die komplexen Nullstellen b_1, \dots, b_n (mit Vielfachheiten gezählt), dann gilt:

$$p(x) = \prod_{k=1}^n (1 - x/b_k).$$

Wir betrachten jetzt die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & : x \neq 0; \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

Sie ist stetig (sogar analytisch) mit Nullstellen genau in den Punkten πn , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Angenommen, die Produktentwicklung

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)$$

würde gelten. Angenommen, wir dürften außerdem das Produkt so umordnen, dass Terme wie

$$\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-n\pi}\right) = 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}$$

zusammen multipliziert werden. Etwa

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Beim Ausmultiplizieren des Produktes ergibt sich dann:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{x^5}{\pi^4} \sum_{m<n} \frac{1}{m^2n^2} - \frac{x^7}{\pi^6} \sum_{\ell<m<n} \frac{1}{\ell^2m^2n^2} \pm \dots$$

Indem wir das mit der Potenzreihe

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \pm \dots$$

vergleichen, erhalten wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 - 2 \sum_{m<n} \frac{1}{m^2n^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 - \frac{\pi^4}{60} = \frac{\pi^4}{90};$$

und so weiter.

Wir werden bald die zwei obigen Lücken verbessern können.

1.2. Unendliche Produkte

1.2.1. Unendliche Produkte komplexer Zahlen

Die Konvergenz von unendlichen Produkten ist fast so definiert, wie man naiv denken würde. Allerdings bestehen wir darauf, dass z.B. die Nullstellen von $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x/b_k)$ genau die Stellen b_k sind. Dazu müssen wir vorsichtig mit 0 umgehen.

Definition 1.1. Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, von denen nur endlich viele 0 sein können, etwa $a_k \neq 0$ für $k \geq m$. Wir nennen $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent*, falls die Folge

$$p_N := \prod_{k=m}^N a_k$$

der Partialprodukte **ab** m gegen einen **von 0 verschiedenen** Wert in \mathbb{C} konvergiert.

In diesem Fall definieren wir

$$\prod_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=m}^N a_k$$

sowie

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k := \left(\prod_{k=1}^{m-1} a_k \right) \cdot \prod_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von m (nachrechnen). Insbesondere gilt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 0$ genau dann, wenn ein k existiert mit $a_k = 0$.

Wenn 0 unendlich oft als Produktglied a_k vorkommt, dann ist das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ einfach nicht wohldefiniert.

Beispiel 1.2. Seien $a_k = 1 - \frac{1}{k+1}$ und $b_k = 1 + \frac{1}{k+1}$. Die Partialprodukte sind in diesen Fällen Teleskop-Produkte:

$$\prod_{k=1}^N a_k = \prod_{k=1}^N \frac{k}{k+1} = \frac{1}{N+1}, \quad \prod_{k=1}^N b_k = \prod_{k=1}^N \frac{k+2}{k+1} = \frac{N+2}{2}.$$

Beide divergieren. Andererseits gilt:

$$\prod_{k=1}^N a_k b_k = \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{N+2}{2(N+1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

also $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{2}$.

Lemma 1.3. Ein *notwendiges* Kriterium für die Konvergenz von $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1.$$

Beweis. Seien o.B.d.A. alle a_k ungleich 0. Dann gilt

$$a_N = \frac{\prod_{k=1}^N a_k}{\prod_{k=1}^{N-1} a_k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} a_k}{\prod_{k=1}^{\infty} a_k} = 1. \quad \square$$

Die elementaren Begriffe für Reihen kann man auf Produkte übertragen. Zum Beispiel gilt das *Cauchy-Kriterium*: das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m \geq N_\varepsilon$ gilt:

$$\left| a_{N_\varepsilon} \cdot \dots \cdot a_m - 1 \right| < \varepsilon.$$

Unendliche Produkte und Reihen lassen sich durch die Exponentialfunktion und den Logarithmus ineinander überführen.

Lemma 1.4. Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, $a_k \neq 0$, und Log der Hauptzweig des Logarithmus. Dann sind äquivalent:

- (i) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert;
- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Log}(a_k)$ konvergiert.

In diesem Fall gilt

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \text{Log}(a_k)\right) = \prod_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Im Allgemeinen ist $\text{Log} \prod_{k=1}^{\infty} a_k \neq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Log}(a_k)$. (Diese Gleichung gilt übrigens auch nicht für endliche Produkte.) LS und RS unterscheiden sich aber höchstens um ein Vielfaches von $2\pi i$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ gilt; sonst teilen wir a_1 durch $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$.

Für jedes endliche N existiert eine ganze Zahl b_N mit

$$\text{Log} \prod_{k=1}^N a_k = \sum_{k=1}^N \text{Log}(a_k) + 2\pi i b_N.$$

Für alle hinreichend großen N gilt

$$\left| \prod_{k=1}^N a_k - 1 \right| < 1.$$

Da Log auf der Kreisscheibe $|z - 1| < 1$ stetig ist, folgt:

$$\text{Log} \prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Log} \prod_{k=1}^N a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N \text{Log}(a_k) + 2\pi i b_N \right).$$

Wir subtrahieren die Grenzwerte über $(N + 1)$ und N voneinander:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{N+1} \text{Log}(a_k) + 2\pi i b_{N+1} \right) - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N \text{Log}(a_k) + 2\pi i b_N \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\text{Log}(a_{N+1}) + 2\pi i (b_{N+1} - b_N) \right). \end{aligned}$$

Da $a_k \rightarrow 1$, geht $\text{Log}(a_k) \rightarrow 0$, also auch

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} (b_{N+1} - b_N).$$

Andererseits ist b_N immer eine ganze Zahl. Also kann man ein N wählen, sodass $b_m = b_N$ für alle $m \geq N$. Es gilt dann

$$\operatorname{Log} \prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \operatorname{Log}(a_k) + 2\pi i b_N \right),$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}(a_k) = \operatorname{Log} \left(\prod_{k=1}^{\infty} a_k \right) - 2\pi i b_N.$$

(ii) \Rightarrow (i) Diese Richtung folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\exp \left(\sum_{k=1}^N \operatorname{Log}(a_k) \right) = \prod_{k=1}^N a_k, \quad N \in \mathbb{N}$$

und aus der Stetigkeit von \exp . □

1.2.2. Absolute Konvergenz

Der Begriff der absoluten Konvergenz für Reihen ist wichtig, denn der Umordnungssatz besagt, dass für genau solche Reihen der Wert und das Konvergenzverhalten nicht von der Reihenfolge der Glieder abhängen.

Wir wollen das auf Produkte übertragen. Den Absolutbetrag der Produktglieder direkt zu bilden ist uninteressant; man überlegt sich leicht, dass $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es tut, und dass in jenem Fall gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} |a_k| = \left| \prod_{k=1}^{\infty} a_k \right|.$$

Stattdessen definiert man die absolute Konvergenz wie folgt.

Definition 1.5. Ein Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ *konvergiert absolut*, wenn das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|a_k|)$ konvergiert.

Beispiel 1.6. Es gilt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{(k+1)} \right) = \frac{1}{2}$$

(nachrechnen). Dieses Produkt konvergiert allerdings nicht absolut.

Mit der Dreiecksungleichung kann man zeigen, dass ein absolut konvergierendes Produkt auch konvergiert. (Das ist nicht so trivial, wie es sich anhört.) Es folgt aber auch aus der folgenden Proposition.

Proposition 1.7. Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, $1 + a_k \neq 0$ für alle k . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ konvergiert absolut;
- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut;
- (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_k)$ konvergiert absolut.

In diesem Fall konvergiert jede Umordnung von $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ gegen denselben Wert.

Beweis. In allen drei Fällen sieht man leicht, dass $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Nullfolge ist. Da

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log}(1 + z)}{z} = 1,$$

haben wir die Abschätzungen $\frac{1}{2}|a_k| \leq |\operatorname{Log}(1 + a_k)| \leq \frac{3}{2}|a_k|$ für alle bis auf endliche viele k ; o.B.d.A. für alle k . Ersetzt man a_k durch $|a_k|$, so erhalten wir auch:

$$\frac{1}{2}|a_k| \leq \operatorname{Log}(1 + |a_k|) \leq \frac{3}{2}|a_k|.$$

Insgesamt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + |a_k|) \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + a_k)| \text{ konv.}$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + |a_k|)$ ist äquivalent zur Konvergenz von $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |a_k|)$, also absolute Konvergenz von $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_k)$ nach (iii) absolut konvergiert, bleibt ihr Wert (und damit auch der Wert des Produkts $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$) invariant unter Umordnungen. \square

1.2.3. Unendliche Produkte holomorpher Funktionen

Wir wollen nun unendliche Produkte von Funktionen betrachten.

Definition 1.8. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

- (i) Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gegen f , wenn für jedes $z \in U$ das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_n(z)$ gegen $f(z)$ konvergiert.
- (ii) Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut, wenn für jedes $z \in U$ das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_n(z)$ absolut konvergiert. Mit anderen Worten: wenn für jedes $z \in U$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ konvergiert.
- (iii) Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut lokal gleichmäßig, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ lokal gleichmäßig konvergiert.

Ähnlich wie bei Reihen, kann man aus absolut lokal gleichmäßiger Konvergenz die Holomorphie der Grenzfunktion folgern.

Proposition 1.9. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge analytischer Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- (i) Das Produkt $\prod_{k=1}^\infty f_k$ konvergiert absolut lokal gleichmäßig;
- (ii) Zu jedem Kompaktum $K \subseteq U$ gibt es ein $N_K \in \mathbb{N}$, sodass

$$f_n(z) \neq 0 \text{ für } z \in K \text{ und } n \geq N_K,$$

und die Reihe $\sum_{n=N_K}^\infty \text{Log} f_n$ konvergiert absolut gleichmäßig auf K .

In diesem Fall konvergiert die Folge der Partialprodukte

$$p_N(z) = \prod_{k=1}^\infty f_k(z)$$

lokal gleichmäßig gegen die holomorphe Grenzfunktion

$$F(z) := \prod_{n=1}^\infty f_n(z)$$

und es gilt

$$\text{ord}_w(F) = \sum_{n=1}^\infty \text{ord}_w(f_n), \quad w \in U.$$

Beweis. Da Log in 1 analytisch ist mit Ableitung $\text{Log}'(1) = 1$, kann man ein $\delta > 0$ finden, das

$$\frac{1}{2}|w - 1| < |\text{Log}(w)| < \frac{3}{2}|w - 1| \quad \text{für alle } w \text{ mit } |w - 1| < \delta$$

erfüllt. Unter Annahme (i) findet man zu jedem Kompaktum $K \subseteq U$ ein $N_K \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(z) - 1| < \delta \text{ für alle } z \in K, \quad n \geq N_K.$$

Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) folgt dann aus

$$\frac{1}{2}|f_n(z) - 1| < |\text{Log} f_n(z)| < \frac{3}{2}|f_n(z) - 1|, \quad n \geq N_K.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{k=N_K}^\infty \text{Log}(f_k)$ und der Stetigkeit von $z \mapsto e^z$ folgt auch die gleichmäßige Konvergenz von $\prod_{k=N_K}^\infty f_k$ auf K . Damit konvergiert auch

$$p_N(z) := \left(\prod_{k=1}^{N_K-1} f_k \right) \cdot \left(\prod_{k=N_K}^\infty f_k \right)$$

gleichmäßig auf K . Da K beliebig war, ist die Konvergenz lokal gleichmäßig auf ganz U .

Nach dem Satz von Weierstraß ist die Grenzfunktion $F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ holomorph. Was die letzte Behauptung anbelangt, finden wir zu jedem $w \in U$ eine kompakte Umgebung

$$w \in K \subseteq U$$

und $N_K \in \mathbb{N}$ mit $f_n(z) \neq 0$, $z \in K$, $n \geq N_K$. Dann gilt

$$F(z) = \left(\prod_{n=1}^{N_K-1} f_n(z) \right) \cdot \underbrace{\left(\prod_{n=N_K}^{\infty} f_n(z) \right)}_{\text{nullstellenfrei}}, \quad z \in K,$$

also

$$\text{ord}_w(F) = \sum_{n=1}^{N_K-1} \text{ord}_w(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ord}_w(f_n). \quad \square$$

Als Letztes definieren wir die *logarithmische Ableitung* $\frac{f'}{f}$ einer meromorphen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, die nicht identisch 0 ist. $\frac{f'}{f}$ hat *einfache Polstellen* dort, wo f eine Nullstelle oder Pol besitzt, mit Residuum

$$\text{Res}_w\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{ord}_w(f).$$

Nach Produktregel macht die logarithmische Ableitung Summen aus Produkten:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

Diese Eigenschaft gilt für unendliche Produkte genauso:

Proposition 1.10. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht identisch 0. Das Produkt $F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ sei auf U lokal gleichmäßig konvergent. Dann gilt

$$\frac{F'}{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k}{f_k},$$

wobei die Reihe auf $U \setminus \{z \in U : F(z) = 0\}$ lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Da $p_N := \prod_{k \leq N} f_k$ lokal gleichmäßig gegen F konvergiert, konvergiert nach dem Satz von Weierstraß auch die Folge der Ableitungen

$$p'_N = \sum_{k=1}^N \left(f'_k \prod_{\substack{j \leq N \\ j \neq k}} f_j \right)$$

lokal gleichmäßig gegen F' . Damit konvergiert auf jedem Kompaktum $K \subseteq U$, der keine Nullstellen von F enthält,

$$\frac{p'_N}{p_N} = \sum_{k=1}^N \frac{f'_k}{f_k}$$

gleichmäßig gegen $\frac{F'}{F}$. □

1.3. Weierstraßscher Produktsatz

Welche Teilmengen von \mathbb{C} können überhaupt als Nullstellenmenge einer (ganzen) holomorphen Funktion auftreten?

Nach dem Identitätssatz darf die Nullstellenmenge einer ganzen Funktion keine Häufungpunkte besitzen. Umgekehrt zeigt uns der *Weierstraßsche Produktsatz*, dass es keine weiteren Einschränkungen an die Nullstellen gibt. Der Beweis ist konstruktiv.

1.3.1. Weierstraßscher Produktsatz

Sei $(a_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge möglicher Nullstellen. Es kann durchaus vorkommen, dass der einfache Ansatz

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/a_k)$$

nicht konvergiert. Wir brauchen eventuell statt $(1 - z/a_k)$ Faktoren, die schneller gegen 1 konvergieren.

Definition 1.11. Die *Weierstraßschen Elementarfaktoren* oder *konvergenzerzeugenden Faktoren* sind die ganzen Funktionen

$$E_n(z) := (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^n z^k/k\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Etwa $E_0(z) = 1 - z$; $E_1(z) = (1 - z)e^z$; $E_2(z) = (1 - z) \exp(z + z^2/2)$; und so weiter. Da $\sum_{k=1}^n z^k/k$ eine Taylor-Approximation zu $-\log(1 - z)$ ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(z) = 1 \text{ für } |z| < 1.$$

Genauer:

Lemma 1.12. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|z| \leq 1 \Rightarrow |1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}.$$

Beweis. Offenbar ist $E_n(0) = 1$. Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} E_n'(z) &= -\exp\left(\sum_{k=1}^n z^k/k\right) + (1-z) \sum_{k=1}^n z^{k-1} \exp\left(\sum_{k=1}^n z^k/k\right) \\ &= -z^n \exp\left(\sum_{k=1}^n z^k/k\right) \\ &= -z^n + \dots \end{aligned}$$

also beginnt die Taylor-Entwicklung von $E_n - 1$ um $z = 0$

$$E_n(z) = 1 - \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Außerdem sind alle Taylor-Koeffizienten von

$$(1 - E_n(z))' = z^n \exp(z + \dots + z^n/n)$$

und damit auch von $1 - E_n(z)$ reell und positiv.

Insbesondere ist

$$f(z) := \frac{1 - E_n(z)}{z^{n+1}}$$

auf $\{|z| \leq 1\}$ holomorph. Nach dem Maximumsprinzip nimmt f sein Maximum am Kreis $|z| = 1$ an; da alle Koeffizienten in der Potenzreihe um $z = 0$ reell und positiv sind, wird das Maximum sogar im Punkt $z = 1$ angenommen. Wegen $E_n(1) = 1$ ist das Maximum einfach 1. Also gilt

$$|1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}$$

für $|z| \leq 1$. □

Satz 1.13 (Weierstraßscher Produktsatz). Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von 0 verschiedener komplexer Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \infty$. Sei $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{N}_0 mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|} \right)^{n_k+1} < \infty \quad \text{für jedes } R > 0.$$

Dann ist

$$F(z) := \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$$

eine ganze Funktion, die genau in den Stellen a_k ($k \geq 1$) verschwindet und sonst nirgendwo. Kommt die Zahl $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau m -mal in der Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ vor, so gilt

$$\text{ord}_a(F) = m.$$

N.B. Unabhängig von der Folge kann man immer $n_k = k$ wählen.

Beweis. Sei $R > 0$ fest und wähle $N_R \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_k| \geq R$ für $k \geq N_R$. Für $|z| \leq R$ ist

$$\left| 1 - E_{n_k}(z/a_k) \right| \leq \left| \frac{z}{a_k} \right|^{n_k+1} \leq \left(\frac{R}{|a_k|} \right)^{n_k+1}, \quad k \geq N_R,$$

also konvergiert $\prod_{k \geq N_R} E_{n_k}(z/a_k)$ gleichmäßig auf $\{|z| \leq R\}$. Damit ist

$$F(z) := \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

eine ganze Funktion. Da jeder Faktor $E_{n_k}(z/a_k)$ eine einfache Nullstelle in a_k besitzt und sonst nirgendwo verschwindet, gilt

$$\text{ord}_a(f) = \#\{k \in \mathbb{N} : a = a_k\}. \quad \square$$

Korollar 1.14. Eine ganze Funktion F mit Nullstellenfolge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (mit Vielfachheiten gezählt) besitzt für jede geeignete Folge $(n_k)_k$ in \mathbb{N} eine Weierstraß-Produktdarstellung

$$F(z) = z^N e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$$

mit einer ganzen Funktion g und $N \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei $N = \text{ord}_0(F)$. Der Quotient $F(z)/(z^N \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k))$ ist ganz und nullstellenfrei, also von der Form $e^{g(z)}$. \square

Korollar 1.15. Jede meromorphe Funktion f auf \mathbb{C} besitzt eine Darstellung als Quotient $f = \frac{g}{h}$ ganzer Funktionen g, h .

Beweis. Seien $(a_k)_{k \geq 1}$ die Polstellen von f (mit Vielfachheit gezählt) und sei h ein Weierstraß-Produkt mit Nullstellen $(a_k)_{k \geq 1}$. Dann ist $g := f \cdot h$ ganz. \square

1.3.2. Produktentwicklung des Sinus

Wir wollen endlich die Weierstraß-Produktentwicklung

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$$

beweisen. Wegen

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} < \infty$$

konvergiert die rechte Seite absolut lokal gleichmäßig, und sie definiert eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in \mathbb{Z} .

Indem wir die Glieder zu n und $-n$ jeweils zusammenmultiplizieren, können wir die konvergenzerzeugenden Faktoren auch wegfällen lassen:

$$\pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Zum Beweis der Produktentwicklung benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.16. Für die ganze Funktion $F(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2)$ gilt:

- (i) $F(-z) = -F(z)$;
- (ii) $F(z+1) = -F(z)$.

Beweis. (i) Unter $z \mapsto -z$ ändert sich nur der Vorfaktor πz .

(ii) Wir verwenden die Identität

$$\left(1 + \frac{z-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{(z+1)^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \left(1 + \frac{z+1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

(beide Seiten sind Polynome im Variablen z , mit Nullstellen genau in $z = n, -n, -n-2$ und mit den gleichen Leitkoeffizienten) und erhalten

$$\begin{aligned} F(z+1) &= \pi(z+1)(1 - (z+1)^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z+1)^2}{(n+1)^2}\right) \\ &= -\pi z(z+1)(z+2) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1 + (z+1)/(n+1))}{(n+1)^2(1 + (z-1)/(n+1))} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ &= -F(z) \cdot (z+1)(z+2) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+z+2)}{(n+1)^2(n+z)}. \end{aligned}$$

Das verbleibende Produkt ist ein Teleskop-Produkt mit Partialprodukten

$$\prod_{n=1}^N \frac{n^2(n+z+2)}{(n+1)^2(n+z)} = \frac{(N+z+1)(N+z+2)}{(N+1)^2(z+1)(z+2)}$$

(nachrechnen) und Grenzwert

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+z+2)}{(n+1)^2(n+z)} = \frac{1}{(z+1)(z+2)},$$

sodass wir $F(z+1) = -F(z)$ erhalten. □

Satz 1.17.

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Wir können auf jeden Fall

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} \cdot \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2)$$

mit einer ganzen Funktion $g(z)$ schreiben.

Wir zeigen zunächst, dass $g'(z)$ beschränkt (und damit konstant) ist. Nach obigem Lemma gilt $e^{g(z+1)} = e^{g(z)}$ und damit $g'(z+1) = g'(z)$. Also genügt es zu zeigen, dass die Funktion $g'(x+iy)$ im Streifen $0 \leq x \leq 1$ beschränkt ist.

Das Rechteck $0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1$ ist kompakt, also ist g zumindest dort sowieso beschränkt. Wir betrachten also $y > 1$.

Bilde die logarithmische Ableitung:

$$\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Im Streifen $0 \leq x \leq 1$ hat die linke Seite den gleichmäßigen Grenzwert

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi \cos(\pi(x+iy))}{\sin(\pi(x+iy))} = \mp\pi i, \quad (\text{nachrechnen})$$

sie ist also für $y > 1$ beschränkt. Die rechte Seite schätzen wir ab mit

$$|x+iy| \leq 2|y|, \quad |(x+iy)^2 + n^2| \geq \frac{1}{2}(y^2 + n^2), \quad (0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1)$$

(folgt aus den Dreiecksungleichungen):

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y|}{n^2 + y^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y|} \cdot \frac{1}{1 + n^2/|y|^2}.$$

Diese obere Schranke ist eine Riemann-Summe, die das Integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi/2$ approximiert (zu einer Zerlegung der Feinheit $\frac{1}{|y|}$) und die insbesondere im Limes $|y| \rightarrow \infty$ konvergiert. Also ist sie als Funktion von y auch beschränkt.

Also ist $g'(z)$ auf ganz \mathbb{C} beschränkt und damit konstant. Wir können damit komplexe Zahlen a, b finden, sodass

$$\sin(\pi z) = e^{az+b} \cdot \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2).$$

Mit der Substitution $z \mapsto -z$ folgt $e^{-az+b} = e^{az+b}$, also $a = 0$. Aus

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = e^b \prod_{n=1}^{\infty} 1$$

folgt $e^b = 1$ und damit die Behauptung. □

Korollar 1.18.

$$\cos(\pi z) = \prod_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

Beweis. Sowohl $\cos(\pi z) = \frac{\sin(2\pi z)}{2 \sin(\pi z)}$ als auch $\cos(\pi z) = \sin(\pi(z + 1/2))$ führt zum Ziel, wenn man die Produktentwicklung von $\sin(\pi z)$ einsetzt. □

1.4. Partialbruchzerlegung

Das Konzept der *Partialbruchzerlegung* passt nicht genau zum Thema Ganze Funktionen. Die Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion ist aber eng mit dem Produktsatz von Weierstraß verwandt.

Für eine rationale Funktion $f(z)$ mit Polstellen a_1, \dots, a_r und Vielfachheiten n_1, \dots, n_r hat man immer eine eindeutige Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{q_1(z)}{(z - a_1)^{n_1}} + \dots + \frac{q_r(z)}{(z - a_r)^{n_r}} + p(z),$$

mit Polynomen q_i vom Grad höchstens n_i und mit einem Polynom p .

Beispiel 1.19.

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}.$$

In diesem Fall ist das Restpolynom $p = 0$.

Eine Verallgemeinerung auf meromorphe Funktionen liefert der Satz von Mittag-Leffler. Die Analogon der Glieder $\frac{q_i(z)}{(z-a_i)^{n_i}}$ heißen *Hauptteile*:

Definition 1.20. (i) Für $a \in \mathbb{C}$ nennt man jede rationale Funktion

$$h_a \in \frac{1}{z-a} \mathbb{C} \left[\frac{1}{z-a} \right] \subset \mathbb{C}(z)$$

einen *Hauptteil mit Entwicklungspunkt a* .

(ii) Eine *Hauptteilverteilung* H auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Menge

$$H = \{h_a : a \in P\}$$

von Hauptteilen $h_a \neq 0$, wobei die Entwicklungspunkte a eine diskrete Teilmenge $P \subseteq U$ durchlaufen.

Die Hauptteilverteilung $H(f)$ einer meromorphen Funktion f besteht aus den Hauptteilen h_a ihrer Laurent-Entwicklungen in den Polstellen a .

Beispiel 1.21. (i) Die Hauptteilverteilung von $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ ist

$$H(f) = \left\{ \frac{1}{z}, -\frac{1}{z+1} \right\}.$$

(ii) Die Hauptteilverteilung von $f(z) = 1/\sin(\pi z)$ ist

$$H(f) = \left\{ \frac{(-1)^n/\pi}{z-n} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Satz 1.22 (Satz von Mittag-Leffler). Sei $P = \{a_0 = 0, a_1, a_2, \dots\}$ eine diskrete Teilmenge ohne Häufungspunkte in \mathbb{C} und h_0, h_1, h_2, \dots Hauptteile mit Entwicklungspunkten a_0, a_1, a_2, \dots . Es gibt Zahlen $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$, so dass für das Taylor-Polynom P_n von h_n vom Grad k_n um 0 die Reihe

$$F = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$$

lokal gleichmäßig konvergiert. Dieses F ist meromorph und besitzt die Hauptteilverteilung

$$H(F) = \{h_0, h_1, h_2, \dots\}.$$

Der Fall $h_0 = 0$ (d.h. kein Pol in 0) ist auch erlaubt; in diesem Fall ist eigentlich $H(F) = \{h_1, h_2, \dots\}$.

Beweis. Wir können annehmen, dass P unendlich ist; sonst ist F nur eine endliche Summe und die Behauptungen sind trivial.

Da P diskret ist und keine Häufungspunkte besitzt, muss $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ gelten. (Denn $P \cap \{|z| \leq R\}$ ist diskret und kompakt für jedes $R > 0$, also endlich.) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2}|a_n| \right\}.$$

Da h_n seinen einzigen Pol in $z = a_n$, also außerhalb K_n hat, konvergiert seine Taylor-Entwicklung um $z = 0$ auf K_n gleichmäßig. Also können wir ein $k_n \in \mathbb{N}$ wählen, sodass für das Taylor-Polynom P_n vom Grad k_n um $z = 0$ gilt:

$$|h_n(z) - P_n(z)| \leq 2^{-n} \text{ für } z \in K_n.$$

Sei nun $R > 0$ beliebig aber fest, und wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{2}|a_n| \geq R$ für alle $n \geq N$. Dann ist $h_n - P_n$ holomorph auf einer offenen Umgebung von $\{z : |z| \leq R\}$ für $n \geq N$, und die Reihe

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} (h_n - P_n)(z) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |h_n(z) - P_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} \leq 1$$

konvergiert dort uniform. Nach dem Satz von Weierstraß ist $\sum_{n=N}^{\infty} (h_n - P_n)$ holomorph auf $\{z : |z| < R\}$. Also definiert

$$h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$$

eine auf $|z| < R$ meromorphe Funktion, deren Hauptteile durch $\{h_k, k < N\}$ gegeben sind. Da R beliebig war, ist

$$h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$$

auf ganz \mathbb{C} meromorph und hat die behauptete Hauptteilverteilung. □

Korollar 1.23. Sei F eine auf ganz \mathbb{C} meromorphe Funktion mit Hauptteilverteilung $H(F) = \{h_0, h_1, h_2, \dots\}$. Dann besitzt F eine Partialbruchzerlegung

$$F = G + h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$$

mit einer ganzen Funktion G , wobei h_0 das Hauptteil in 0 und P_n geeignete Taylor-Polynome von h_n ($n \geq 1$) um $z = 0$ sind.

Beweis. Konstruiere mit dem Satz von Mittag-Leffler eine Reihe

$$\tilde{F} = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$$

mit $H(\tilde{F}) = H(F)$. Dann ist $G = F - \tilde{F}$ ganz. □

Das bekannteste Beispiel einer Partialbruchzerlegung stammt schon von Euler:

Satz 1.24 (Partialbruchzerlegung des Kotangens). Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

Beweis. Logarithmische Ableitung bilden in der Produktentwicklung

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n}$$

liefert

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Die zweite Darstellung erhalten wir, indem wir die Glieder zu $\pm n$ zusammen addieren. □

1.5. Funktionen endlicher Ordnung

1.5.1. Ordnung und Maximalbetrag

Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms $p(z)$ bestimmt ihr Wachstumsverhalten im Limes $|z| \rightarrow \infty$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra: hat $p(z)$ genau N Nullstellen in \mathbb{C} , dann verhält sich p asymptotisch wie z^N .

Diese Aussage kann man (in einer gewissen Form) auf allgemeine meromorphe Funktionen erweitern. Solche Fragestellungen gehören zum Gebiet der *Nevanlinna-Theorie*. Das würde uns viel zu weit führen; aber mit den Grundideen dieser Theorie erhalten wir eine Verbesserung des Produktsatzes von Weierstraß.

Zu einer ganzen Funktion f definieren wir die Funktion (*Maximalbetrag*)

$$M_f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

M_f ist dann stetig und nach dem Maximumsprinzip monoton steigend. Wenn $M_f(r) \leq Cr^N$ für irgendein $N \in \mathbb{N}$ und Konstante C , dann ist ∞ ein Pol von f der Ordnung höchstens N und damit f ein Polynom. Das mildeste Wachstum, das wir von einer transzendenten Funktion erwarten können, ist (sub)-exponentiell.

Definition 1.25. Eine ganze Funktion f hat *endliche Ordnung* ρ , wenn

$$\rho := \inf\{\alpha > 0 : M_f(r) < e^{r^\alpha} \text{ für hinreichend großes } r\} < \infty.$$

Mit anderen Worten: $r^{\rho-\varepsilon} < \ln M_f(r) < r^{\rho+\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$ und jedes hinreichend große r (wobei “hinreichend groß” von ε abhängt), oder wieder anders ausgedrückt:

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln(r)}.$$

Beispiel 1.26. (i) Polynome sind ganze Funktionen der Ordnung 0.

(ii) \sin und \cos sind ganze Funktionen der Ordnung 1. Für \cos folgt das z.B. aus

$$|\cos(z)| = \frac{1}{2}|e^{iz} + e^{-iz}| \leq e^{|z|} \Rightarrow \rho \leq 1$$

sowie

$$|\cos(iy)| = \cosh(y) \geq \frac{1}{2}e^{|y|}, \quad y \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho \geq 1.$$

(iii) $\cos(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$ ist eine ganze Funktion. Da $\cos(z)$ die Ordnung 1 hat, muss $\cos(\sqrt{z})$ die Ordnung $1/2$ haben.

(iv) $\exp(\exp(z))$ ist eine ganze Funktion unendlicher Ordnung.

Allgemeiner: ist $p(z)$ ein Polynom vom Grad n , dann ist $e^{p(z)}$ eine ganze Funktion der Ordnung n . Wir dürfen annehmen, dass der Leitkoeffizient von p gleich 1 ist, denn $f(z)$ und $f(Az)$ haben offenbar die gleiche Ordnung.

Einerseits gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$|p(z)| \leq |z|^{n+\varepsilon} \quad \text{falls } |z| \text{ hinreichend groß ist}$$

und damit

$$|e^{p(z)}| \leq e^{|p(z)|} \leq e^{|z|^{n+\varepsilon}}, \quad |z| \gg 0.$$

Andererseits gilt $e^{p(z)} = e^{z^n} \cdot \frac{1}{e^{q(z)}}$ mit einem Polynom q von Grad höchstens $n-1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt also

$$|e^{p(x)}| \geq e^{|x|^n} \cdot e^{-|x|^{n-1+\varepsilon}} \geq e^{|x|^{n-\varepsilon}}$$

für alle hinreichend große $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Die Ordnung einer Potenzreihe kann man vom Wachstum ihrer Koeffizienten direkt ablesen. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion. Da diese Reihe den Konvergenzradius ∞ hat, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{n} = -\infty$. Die Funktion f hat endliche Ordnung genau dann, wenn $-\frac{\ln |a_n|}{n}$ höchstens logarithmisch wächst:

Proposition 1.27. Die Ordnung ρ der ganzen Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist bestimmt durch

$$-\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{n \ln(n)} < 0$$

bzw.

$$e^{-1/\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} {}^{n \ln(n)}\sqrt{|a_n|}$$

bzw.

$$\rho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\lambda} \cdot \sqrt[\lambda]{|a_n|} = 0 \right\}.$$

Dabei verstehen wir $-\frac{1}{\rho} = -\infty \Leftrightarrow \rho = 0$, und für $a_n = 0$ ist $\ln |a_n| := -\infty$.

Beispiel: Dass e^z die Ordnung 1 hat, ist (mit $|a_n| = \frac{1}{n!}$) äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{n \ln(n)}\sqrt{n!} = e.$$

(Wir werden bald das Wachstum von $n!$ viel besser kennenlernen \Rightarrow Stirling-Formel)

Beweis. Sei ohne Einschränkung f kein Polynom.

Nach der Cauchy-Ungleichung gilt $|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}$ für jedes $r > 0$. Falls die Ordnung von f **kleiner** als $\lambda > 0$ ist, dann existiert ein $R_0 > 0$ sodass:

$$|a_n| \leq M_f(r) r^{-n} < e^{r^\lambda} r^{-n}, \quad r > R_0$$

für alle n . Für festes n hat die Funktion rechts ihr Minimum in $r = \sqrt[\lambda]{\frac{n}{\lambda}}$. Also gilt (für alle hinreichend große n , sodass $\sqrt[\lambda]{n/\lambda} > R_0$)

$$|a_n| < \exp\left(\frac{n}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{-n/\lambda} = \left(\frac{e\lambda}{n}\right)^{n/\lambda},$$

also

$$\ln |a_n| < \frac{n}{\lambda}(1 + \ln(\lambda) - \ln(n)),$$

und damit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{n \ln(n)} \leq -\frac{1}{\lambda}.$$

Umgekehrt folgt aus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{n \ln(n)} \leq -\frac{1}{\lambda}$$

(für hinreichend große n , etwa $n > N$) die Ungleichung

$$|a_n| \leq \left(\frac{e\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}.$$

Für hinreichend großes r und jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ folgt

$$|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{für alle } n > e\lambda \cdot (2r)^\lambda, \quad n > N.$$

Sei $N_r := \lfloor e\lambda \cdot (2r)^\lambda \rfloor$. Dann gilt

$$|f(z)| < \sum_{n=1}^{N_r} |a_n| r^n + \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{N_r} |a_n| r^n + \frac{1}{2^{N_r}}.$$

Wir schätzen alle $|a_n| r^n$ durch ihr Supremum ab und bilden das Maximum über $|z| = r$:

$$M_f(r) < \frac{1}{2^{N_r}} + (1 + N_r) \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n.$$

Dabei ist (für $n > N$)

$$|a_n| r^n < \left(\frac{e\lambda}{n} \right)^{n/\lambda} \cdot r^n.$$

Als Funktion von n nimmt die rechte Seite ihr Maximum in $n = \lambda r^\lambda$ an – und das Maximum dort ist e^{r^λ} . Also gilt (weiterhin nur für r hinreichend groß)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n \leq e^{r^\lambda}$$

und

$$M_f(r) \leq \frac{1}{2^{N_r}} + (1 + N_r) e^{r^\lambda} < (2 + (2r)^\lambda) \cdot e\lambda e^{r^\lambda},$$

und damit hat f endliche Ordnung, und zwar höchstens λ .

Indem wir zum Infimum über alle λ 's, die die Ungleichung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{n \ln(n)} \leq -\frac{1}{\lambda}$$

erfüllen, (d.h. das ρ wählen, das sie zu einer Gleichung macht) erhalten wir die Ordnung von f . \square

Mit diesem Lemma ist es nicht schwer, ganze Funktionen einer beliebigen Ordnung zu konstruieren. Zum Beispiel definiert für jedes $\rho > 0$ die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt[n]{n}} \right)^n$$

eine ganze Funktion der Ordnung ρ .

Die Ordnung verhält sich gut unter Summe, Produkt und Ableitung:

Proposition 1.28. Seien f und g ganze Funktionen der Ordnung ρ_f bzw. ρ_g .
 (i) $f + g$ und $f \cdot g$ haben Ordnung höchstens $\max(\rho_f, \rho_g)$.
 (ii) Gilt $\rho_f \neq \rho_g$, dann haben $f + g$ und $f \cdot g$ Ordnung genau $\max(\rho_f, \rho_g)$.
 (iii) Die Ordnung von f' ist auch ρ_f .

Beweis. (i) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für alle hinreichend große $|z|$

$$|f(z)| \leq \exp(|z|^{\rho_f + \varepsilon/2}), \quad |g(z)| \leq \exp(|z|^{\rho_g + \varepsilon/2}).$$

Also (wieder für $|z|$ hinreichend groß)

$$|f(z) + g(z)| \leq \exp(|z|^{\rho_f + \varepsilon/2}) + \exp(|z|^{\rho_g + \varepsilon/2}) \leq \exp\left(|z|^{\max(\rho_f, \rho_g) + \varepsilon}\right),$$

$$|f(z) \cdot g(z)| \leq \exp\left(|z|^{\rho_f + \varepsilon/2} + |z|^{\rho_g + \varepsilon/2}\right) \leq \exp\left(|z|^{\rho_f + \rho_g + \varepsilon}\right).$$

(ii) Angenommen, $\rho_f > \rho_g$. Nach (i) ist

$$\rho_f = \rho_{(f+g)-g} \leq \max(\rho_{f+g}, \rho_g).$$

Dabei ist $\rho_{-g} = \rho_g < \rho_f$, also $\rho_{f+g} = \rho_f$.

Dass die Ordnung von $f \cdot g$ ebenfalls $\max(\rho_f, \rho_g)$ ist, ist deutlich schwieriger zu beweisen!¹

(iii) $\rho_{f'} = \rho_f$ folgt leicht mithilfe der Formel

$$-\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{n \ln(n)} \quad \text{falls } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

□

1.5.2. Anzahlfunktion und Konvergenzexponent

Die ‘Anzahl’ der Nullstellen eines Polynoms ersetzen wir für ganze Funktionen f durch die *Anzahlfunktion* $N_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$, die die Anzahl ihrer Nullstellen (mit Vielfachheiten) von Betrag höchstens r wiedergibt:

$$N_f(r) = \sum_{|z| \leq r} \text{ord}_z(f).$$

Die erste Verbindung zwischen M_f und N_f ist die Jensen’sche Formel. (Erinnerung: M_f bezeichnet den Maximalbetrag.)

¹Einen Beweis finden Sie z.B. in B. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Transl. Math. Monogr. **5**, Revised Edition (1980), §1.9 Theorem 12.

Proposition 1.29 (Jensen'sche Formel). Sei $f : \{|z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) \neq 0$. Für jedes $0 < r < R$ gilt

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt - \int_0^r \frac{N_f(t)}{t} dt.$$

Wenn f keine Nullstellen hat (also $N_f \equiv 0$), dann ist $\ln |f(z)|$ Realteil von $\text{Log } f(z)$, und die Behauptung ist einfach das Realteil der Cauchy'schen Integralformel für $\text{Log } f(z)$ in $z = 0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die rechte Seite als Funktion von r stetig ist. Wenn man r so wählen darf, dass f auf dem Kreis $|z| = r$ keine Nullstellen besitzt, dann wird der Beweis deutlich einfacher.

Seien also a_1, a_2, \dots, a_N die Nullstellen von f (mit Vielfachheiten gezählt) im Kreis $|z| < R$ und sei

$$g(z) := \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^N (z - a_j)}.$$

Für $z \neq a_j$ ist

$$\ln |f(z)| = \ln |g(z)| + \sum_{j=1}^N \ln |z - a_j|;$$

also gilt (falls $r \neq |a_j|$ für alle j)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt &= \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{it})| dt + \sum_{j=1}^N \int_0^{2\pi} \ln |re^{it} - a_j| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{it})| dt + \sum_{|a_j| < r} (2\pi \ln r) + \sum_{|a_j| > r} 2\pi \ln |a_j|. \end{aligned}$$

(Nach dem Mittelwertsatz gilt genauer $\int_0^{2\pi} \ln |g(re^{it})| dt = 2\pi |g(0)|$; das brauchen wir aber nicht.) Insbesondere ist das Integral *stetig* in r , obwohl der Integrand nicht einmal überall definiert ist.

Da beide Seiten stetige Funktionen von r sind, genügt es, die Behauptung für $r \notin \{|a_j| : j = 1, \dots, N\}$ zu beweisen. Dann ist

$$\text{Log } f(re^{i\theta}) = \ln |f(re^{i\theta})| + i \cdot \text{Arg } f(re^{i\theta})$$

dort holomorph. Aus der Polarform der Cauchy-Riemann-Gleichungen,

$$u + iv \text{ holomorph} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln |f(re^{i\theta})| = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Arg} f(re^{i\theta}).$$

Das Prinzip vom Argument besagt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Arg} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi N_f(r).$$

Es gilt also

$$\frac{N_f(r)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{N_f(t)}{t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial}{\partial t} \ln |f(te^{i\theta})| dt d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|. \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 1.30. Für jede ganze Funktion f mit $f(0) \neq 0$ gilt

$$N_f(r) \leq -\ln |f(0)| + \ln M_f(e \cdot r).$$

Beweis. $\int_r^{er} \frac{1}{t} dt = 1$ und N_f ist monoton steigend. Also gilt

$$\begin{aligned} N_f(r) &\leq \int_r^{er} \frac{N_f(t)}{t} dt \\ &\leq \int_0^{er} \frac{N_f(t)}{t} dt \\ &= -\ln |f(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(ere^{it})| dt \\ &\leq -\ln |f(0)| + \ln M_f(e \cdot r). \end{aligned} \quad \square$$

Da die Ordnung von f als \limsup von $\frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln(r)}$ definiert war, ist folgende Definition naheliegend:

Definition 1.31. Der *Konvergenzexponent* von f ist

$$\kappa := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln N_f(r)}{\ln(r)}.$$

Den Namen erklären wir gleich. Sei a_1, a_2, a_3, \dots eine Aufzählung der von 0 verschiedenen Nullstellen von f (mit Vielfachheiten). Der Konvergenzexponent ist das Infimum aller Exponenten λ , für die die Reihe $\sum a_n^{-\lambda}$ absolut konvergiert:

Proposition 1.32. Für den Konvergenzexponenten κ von f gilt

$$\kappa = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} \text{ konvergiert} \right\}.$$

Beweis. Wir schreiben $\sum |a_n|^{-\lambda}$ als Riemann–Stieltjes Integral um:

$$\sum |a_n|^{-\lambda} = \int_0^{\infty} r^{-\lambda} dN_f(r),$$

bzw. als Maßintegral für das Borel-Maß dN_f mit

$$dN_f([a, b]) = N_f(b) - N_f(a).$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_0^R r^{-\lambda} dN_f(r) = \frac{N_f(R)}{R^\lambda} - \int_0^R N_f(r) d(r^{-\lambda}) = \frac{N_f(R)}{R^\lambda} + \lambda \int_0^R \frac{N_f(r)}{r^{\lambda+1}} dr, \quad R > 0.$$

Also konvergiert $\sum |a_n|^{-\lambda}$ genau dann, wenn $\int_0^R \frac{N_f(r)}{r^{\lambda+1}} dr$ konvergiert, denn aus beiden Annahmen folgt $\frac{N_f(R)}{R^\lambda} \rightarrow 0$.

(i) Insbesondere folgt aus der Konvergenz von $\sum |a_n|^{-\lambda}$ den Limes

$$\frac{N_f(R)}{R^\lambda} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

und damit $\ln N_f(R) \leq \ln R^\lambda$ für alle hinreichend große R , also $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln N_f(R)}{\ln R} \leq \lambda$.

(ii) Gilt umgekehrt $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln N_f(R)}{\ln R} \leq \lambda$, dann ist (asymptotisch) $N_f(R) < R^{\lambda+\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$, also konvergiert $\int_0^{\infty} \frac{N_f(r)}{r^{\lambda+1}} dr$ und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\lambda}$.

Also ist

$$\kappa = \inf \left\{ \lambda : \ln N_f(R) \leq \ln R^\lambda, R \gg 0 \right\} = \inf \left\{ \lambda : \sum |a_n|^{-\lambda} \text{ konvergiert} \right\}. \quad \square$$

Beispiel 1.33. (i) Polynome haben Konvergenzexponenten 0.

(ii) \sin und \cos haben Konvergenzexponenten 1. Für \sin ist das so, weil $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^{-\lambda}$ genau dann konvergiert, wenn $\lambda > 1$.

(iii) Die ganze Funktion $\cos(\sqrt{z})$ hat den Konvergenzexponenten $1/2$.

Vgl. Beispiel 1.26. Ist der Konvergenzexponent einer ganzen Funktion etwa immer gleich ihrer Ordnung?

Natürlich nicht. Zum Beispiel hat e^z die Ordnung 1 aber Konvergenzexponent 0, denn sie hat gar keine Nullstellen. Im Allgemeinen hat man nur den folgenden Zusammenhang:

Satz 1.34 (Hadamard). *Für jede ganze Funktion mit Ordnung ρ und Konvergenzexponenten κ gilt*

$$\kappa \leq \rho.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $f(0) \neq 0$.

Aus der Jensen-Formel folgt $N_f(r) \leq -\ln |f(0)| + \ln M_f(e \cdot r)$ und damit

$$\kappa = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln N_f(r)}{\ln(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(e \cdot r)}{\ln(r)} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(e \cdot r)}{\ln(e \cdot r)} = \rho. \quad \square$$

1.6. Der Produktsatz von Hadamard

Erinnerung: für eine holomorphe Funktion

$$f : \{|z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(0) \neq 0$ und $0 < r < R$ besagt die Jensen'sche Formel

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt - \int_0^r \frac{N_f(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt + \sum_{|a_i| < r} \ln(|a_i|/r),$$

wobei die Summe rechts über die Nullstellen von f in der Kreisscheibe $|a_i| < r$ läuft. Diese Formel verallgemeinert sich auf beliebige Punkte w in der Kreisscheibe wie folgt:

Lemma 1.35 (Poisson–Jensen-Formel). *Sei $|w| < r$ mit $|f(w)| \neq 0$. Dann gilt*

$$\ln |f(w)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{re^{it} + w}{re^{it} - w} \right] dt + \sum_{|a_i| < r} \ln \left(\frac{1}{r} \left| r^2 \frac{a_i - w}{r^2 - \bar{a}_i w} \right| \right).$$

Beweis. Die Möbiustransformation

$$\varphi(z) = r^2 \cdot \frac{z - w}{r^2 - \bar{w}z}$$

bildet die Kreisscheibe $\{|z| < r\}$ biholomorph auf sich selbst und bildet w auf 0. Dann verwende die Jensen'sche Formel auf $g(z) := f \circ \varphi^{-1}(z)$ mit $g(0) = f(w)$. \square

Damit erhalten wir eine viel stärkere Form der Weierstraß-Faktorisierung:

Satz 1.36 (Produktsatz von Hadamard). *Sei f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung ρ und Konvergenzexponenten κ und sei a_1, a_2, a_3, \dots eine Aufzählung ihrer von 0 verschiedenen Nullstellen mit Vielfachheiten. Sei $p = \lfloor \rho \rfloor \in \mathbb{N}_0$.*

Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ mit

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_p(z/a_k).$$

Der Grad von P ist höchstens die Ordnung ρ von f :

$$q := q(f) := \text{grad } P \leq \rho.$$

Hier ist $m = \text{ord}_0(f)$ die Vielfachheit von 0.

Beweis. Die Eindeutigkeit von P ist trivial. Sei außerdem o.B.d.A $f(0) \neq 0$, sonst betrachten wir $f(z)/z^m$.

Aus der verallgemeinerten Jensen-Formel folgt

$$\text{Log } f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{it})| \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt + \sum_{|a_i| < R} \text{Log} \left(\frac{Rz - Ra_n}{R^2 - \bar{a}_n z} \right) + i \cdot C$$

mit einer Konstanten C , denn linke und rechte Seite haben das gleiche Realteil und sind (zumindest in einer Umgebung von $z = 0$) holomorph. Für die $(p+1)$ -ten Ableitungen gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \text{Log } f(z) &= \frac{(p+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{it})| \cdot \frac{2Re^{it}}{(Re^{it} - z)^{p+2}} dt \\ &\quad + p! \sum_{|a_i| < R} \left(\frac{\bar{a}_i^{p+1}}{(R^2 - \bar{a}_i z)^{p+1}} - \frac{1}{(a_i - z)^{p+1}} \right). \end{aligned}$$

Also haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \text{Log } f(z) + \sum_{|a_i| < R} \frac{p!}{(a_i - z)^{p+1}} \right| \\ &\leq \frac{(p+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln M_f(R) \cdot \frac{2Re^{it}}{|Re^{it} - z|^{p+2}} dt + p! \sum_{|a_i| < R} \frac{\bar{a}_i^{p+1}}{|R^2 - \bar{a}_i z|^{p+1}} \\ &\leq \frac{(p+1)!}{2\pi} \cdot \ln M_f(R) \frac{4\pi R}{(R - |z|)^{p+2}} + \frac{p! N_f(R)}{(R - |z|)^{p+1}}. \end{aligned}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt (für R hinreichend groß) $\ln M_f(R) < R^{\rho+\varepsilon}$ und $N_f(R) < R^{\rho+\varepsilon}$. Da $p + 1 > \rho$, konvergiert die rechte Seite gegen 0 im Limes $R \rightarrow \infty$, d.h.

$$\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \operatorname{Log} f(z) = -p! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(a_i - z)^{p+1}}.$$

Wegen $\ln E_p(z/a) = \ln(a - z) + (\text{Polynom vom Grad } p)$ gilt außerdem

$$\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \ln E_p(z/a) = -p! \cdot \frac{1}{(a - z)^{p+1}}.$$

Also gibt es ein Polynom P vom Grad höchstens p mit

$$\ln f(z) = P(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \ln E_p(z/a_i),$$

und damit

$$f(z) = e^{P(z)} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} E_p(z/a_i). \quad \square$$

Statt $p = \lfloor \rho \rfloor$ kann man auch jede andere natürliche Zahl $p \leq \rho$ wählen, für die die Reihe $\sum |a_i|^{-p-1}$ konvergiert. Der Grad des Polynoms im Satz von Hadamard kann sich dadurch ändern. Wenn p *minimal* gewählt ist, heißt die Zahl

$$g(f) := \max(p, q) \in \mathbb{N}_0$$

das **Geschlecht** der ganzen Funktion f .

Korollar 1.37. *Jede ganze Funktion endlicher Ordnung mit endlich vielen Nullstellen besitzt die Darstellung*

$$f(z) = P(z)e^{Q(z)}$$

mit Polynomen P und Q .

Beweis. Nach dem Satz von Hadamard besitzt f eine Darstellung der Form

$$f(z) = z^m e^{p(z)} \prod_{i=1}^n E_p(z/a_i),$$

wobei a_1, \dots, a_n die endlich vielen Nullstellen sind. Dabei ist

$$E_p(z/a_i) = (1 - z/a_i) \exp\left(\sum_{k=1}^p z^k/a_i^k\right)$$

selbst von der Form $P(z) \cdot e^{Q(z)}$. Also hat das Produkt $f(z)$ auch diese Form. \square

Korollar 1.38. *Jede ganze Funktion von endlicher, nichtganzer Ordnung ρ hat unendlich viele Nullstellen.*

Mit mehr Arbeit kann man genauer zeigen: der Konvergenzexponent ist in diesem Fall gleich der Ordnung. Insbesondere divergiert die Reihe $\sum |a_i|^{-\lambda}$ für jede Zahl $0 < \lambda < \rho$.

Beweis. Die Ordnung von $e^{Q(z)}$ und damit auch $P(z)e^{Q(z)}$ ist $q := \text{grad } Q \in \mathbb{N}_0$. Da $q \neq \rho$, kann f nicht von der Form $f(z) = P(z)e^{Q(z)}$ sein. \square

Mit dem Produktsatz von Hadamard lassen sich Produktentwicklungen ganzer Funktionen oft viel einfacher berechnen. Zum Beispiel die mit viel Mühe errungene Produktentwicklung des Sinus:

Beispiel 1.39. Die ganze Funktion

$$f(z) := \frac{\sin(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!} z^n$$

hat Ordnung $\rho = 1/2$ und einfache Nullstellen in den Punkten $z = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Produktsatz von Hadamard gilt

$$f(z) = f(0) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right).$$

Mit der Substitution $z \mapsto z^2$ erhalten wir

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

2. Die Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ ist eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit den Eigenschaften:

- (i) $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$;
- (ii) $\Gamma(1) = 1$.

Durch Wiederholung von (i) sieht man:

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(Man setzt $\Gamma(n + 1) = n!$ und nicht $\Gamma(n) = n!$, denn dadurch vereinfachen sich einige wichtige Formeln; unter anderem die Stirling-Approximation.)

Die Funktion Γ ist durch (i) und (ii) noch nicht eindeutig bestimmt. Allerdings führt jeder nachvollziehbare Lösungsansatz zu der gleichen Funktion.

2.1. Die Gauß-Darstellung der Gamma-Funktion

Die Definition der Gamma-Funktion kann durch das “Teleskop-Produkt”

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n+k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \dots$$

motiviert werden; wenn das konvergieren würde, dann folgt mit einer Umordnung:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n+k} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+2} \cdot \dots = 1 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Das Produkt divergiert aber gegen 0. Die Partialprodukte sind für hinreichend großes N nämlich

$$\prod_{k=1}^N \frac{k}{n+k} = n! \cdot \frac{1}{(N+1)(N+2)\dots(N+n)}.$$

Wir erhalten $n!$, indem wir das Ganze mit N^n multiplizieren und zum Grenzwert $N \rightarrow \infty$ übergehen. In diesem Limes kann man direkt n durch eine komplexe Zahl z ersetzen:

Definition 2.1. Die Γ -Funktion wird durch

$$\Gamma(z+1) := \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \prod_{k=1}^N \frac{k}{z+k}$$

definiert.

Also

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z \cdot (N-1)!}{z(z+1)\dots(z+N-1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z \cdot N!}{z(z+1)\dots(z+N)}.$$

Proposition 2.2. *Der Limes*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^z \prod_{k=1}^N \frac{k}{z+k}$$

konvergiert gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$ und definiert dort eine holomorphe Funktion.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass der Limes der Logarithmen,

$$F_N(z) := z \ln(N) + \sum_{k=1}^N \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1+z/k} \right) = z \ln(N) - \sum_{k=1}^N \operatorname{Log}(1+z/k),$$

dort gleichmäßig konvergiert. Die Holomorphie von $\Gamma(z)$ folgt dann nach dem Satz von Weierstraß.

Sei K fest und wähle $m_K \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $k > m_K$ und $z \in K$ gilt: $|z/k| < 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Log}(1+z/k) = \sum_{k=1}^{m_K} \operatorname{Log}(1+z/k) - \sum_{k=m_K+1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z/k)^n}{n}, \quad z \in K,$$

also

$$\begin{aligned} F_N(z) &= \sum_{k=1}^{m_K} \left(1/k - \operatorname{Log}(1+z/k) \right) \\ &\quad + z \left(\ln(N) - 1 - \dots - \frac{1}{N} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{m_K+1} \right)^n \sum_{k=m_K+1}^N \left(\frac{m_K+1}{k} \right)^n. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{k=m_K+1}^N \left(\frac{m_K+1}{k} \right)^n$ ist (unabhängig von n oder N) nach oben durch $m_K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} m_K$ beschränkt, und die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{m_K+1} \right)^n$ konvergiert gleichmäßig auf K . Die Behauptung folgt dann mit Hilfe des folgenden Lemmas. \square

Lemma 2.3. *Der Grenzwert*

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 + \dots + \frac{1}{N} - \ln(N) \approx 0,5772156649$$

existiert.

γ heißt *Euler-Konstante* (oder auch *Euler-Mascheroni-Konstante*) und ist eng mit der Gamma-Funktion verbunden. Unter anderem ist $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} -F'_N(0) = -\Gamma'(1)$, also

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2} dx &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^1 \frac{t}{(k+t)^2} dt \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \ln(N) - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right). \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx$ ist nichtnegativ und wird durch $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1$ majorisiert. Also konvergiert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 1 + \dots + \frac{1}{N} - \ln(N) = 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx,$$

und zwar gegen eine Zahl im Intervall $[0, 1]$. □

Wir haben uns oben schon überlegt, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die gewünschte Funktionalgleichung erfüllt ist:

Proposition 2.4. $\Gamma(z)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{z-1} \prod_{k=1}^N \frac{k}{z-1+k} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z+N}{Nz} \cdot N^z \prod_{k=1}^N \frac{k}{z+k} \\
 &= \frac{1}{z} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \prod_{k=1}^N \frac{k}{z+k} = \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Korollar 2.5. $\Gamma(z)$ ist eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} mit einfachen Polen genau in den Punkten $0, -1, -2, -3, \dots$ und Residuen

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest. Wir verwenden die Darstellung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

für z in einer kleinen punktierten Umgebung $0 < |z+n| < \varepsilon$ von $-n$. Dabei ist $h(z) := \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$ holomorph in $z = -n$ mit Wert

$$\frac{\Gamma(-n+n+1)}{-n(-n+1)\dots(-n+n-1)} = \frac{1}{(-1)^n n!};$$

also hat $\Gamma(z) = \frac{h(z)}{z+n}$ einen einfachen Pol in $z = -n$ mit Residuum $h(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$. \square

2.2. Die Produktentwicklungen von Euler und Weierstraß

Die ursprüngliche Definition der Γ -Funktion (Euler, 1729) ist auch durch das obige "Teleskopprodukt" motiviert. Euler korrigierte das divergente Produkt wie folgt:

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \dots}_{\text{divergiert!}} \stackrel{“=”}{=} \frac{1 \cdot 2^n}{n+1} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{n+2} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{n+3} \cdot \dots$$

Also

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-z}(k+1)^z}{k+z} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z+k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z.$$

Proposition 2.6. Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z+k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$ gegen $\Gamma(z+1)$.

Beweis. Wir schreiben N^z als Teleskop-Produkt um:

$$N^z = \frac{2^z}{1^z} \cdot \dots \cdot \frac{N^z}{(N-1)^z} = \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^z.$$

Damit ist das $(N-1)$ -te Partialprodukt von $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z+k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z$ genau

$$\prod_{k=1}^{N-1} \frac{k}{z+k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z = N^z \prod_{k=1}^{N-1} \frac{k}{z+k} = \frac{z+N}{N} \cdot N^z \prod_{k=1}^N \frac{k}{z+k}.$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ konvergiert $\frac{z+N}{N}$ (lokal gleichmäßig) gegen 1, und $N^z \prod_{k=1}^N \frac{k}{z+k}$ nach Definition gegen $\Gamma(z+1)$. □

Korollar 2.7. Die Gamma-Funktion nimmt den Wert 0 nicht an.

Beweis. Keine der Faktoren $\frac{k}{z+k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z$ im Euler-Produkt für $\Gamma(z+1)$ besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} . □

Da $\Gamma(z)$ nirgendwo verschwindet, ist $\frac{1}{\Gamma(z)}$ eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in $z = 0, -1, -2, \dots$. Allerdings ist die Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z+k}{k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-z}$$

nach Euler nicht von der Form eines kanonischen Produktes im Sinne von Weierstraß.

Proposition 2.8 (Weierstraß-Produkt). Für $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Hier ist γ die Euler-Konstante.

Beweis. Das Produkt konvergiert absolut lokal gleichmäßig nach dem Produktsatz von Weierstraß.

Wegen der Stetigkeit von \exp ist

$$e^{\gamma z} = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp(z(1 + 1/2 + \dots + 1/N) - z \ln(N)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{z(1+1/2+\dots+1/N)}}{N^z}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z e^{\gamma z} & \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} z \frac{e^{z(1+1/2+\dots+1/N)}}{N^z} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z}{N^z} \cdot \frac{1+z}{1} \cdot \frac{n+1+z}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{N+z}{N} \\ & = \frac{z}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{\Gamma(z)}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Darstellung von Gauß verwendet haben. \square

Aus der Weierstraß-Produktentwicklung folgt unmittelbar eine wichtige Verbindung zu den trigonometrischen Funktionen:

Proposition 2.9 (Eulerscher Ergänzungssatz). *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Für diese Identität gibt es auch die symmetrische Form

$$\Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.$$

Beweis. Verwende die Weierstraß-Darstellung sowie Produktentwicklung des Sinus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} & = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \times (-z) e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \\ & = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ & = -\frac{z}{\pi} \sin(\pi z). \end{aligned}$$

Mit $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ folgt die Behauptung. \square

Zum Beispiel zeigt man damit: $\Gamma(1/2)^2 = \pi$, also $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2.3. Eulers Integraldarstellung

Die Gamma-Funktion wird oft für positiv, reelles x als uneigentliches Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

eingeführt. Hier wollen wir das Integral funktionentheoretisch untersuchen und mit den Produktdarstellungen von $\Gamma(z)$ in Verbindung bringen.

Lemma 2.10. *Das Integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1} dt$$

konvergiert in der Halbebene $\operatorname{Re}[z] > 0$ lokal gleichmäßig und definiert eine holomorphe Funktion.

Beweis. Sei $z = x + iy$. Das Integral wird für $x \approx 0$ durch

$$\left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

majorisiert. Für die obere Grenze definieren wir für jedes $x > 0$ die Konstante

$$C_x = \left(\frac{2}{e}(x-1) \right)^{x-1},$$

so dass $t^{x-1} \leq C_x e^{t/2}$ für alle $t \geq 1$. Dann erhalten wir

$$\left| \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq C_x \int_1^{\infty} e^{-t/2} dt = 2C_x e^{-1/2} < \infty.$$

Also konvergiert das Integral für $x > 0$.

Wir können $f(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ als Limes der holomorphen Funktionen

$$f_n(z) := \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1} dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

schreiben. Wir wollen zeigen, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum

$$K \subseteq \{z = x + iy : x > 0\}$$

konvergiert. Seien dazu $\varepsilon, M > 0$ so gewählt, dass $\varepsilon < \operatorname{Re}[z] < M$ für alle $z \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &\leq \int_0^{1/n} t^{x-1} dt + C \int_n^\infty e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{xn^x} + 2C_x e^{-n/2} \leq \frac{1}{\varepsilon n^\varepsilon} + 2C_M e^{-n/2}, \end{aligned}$$

unabhängig von $z = x + iy \in K$.

Also konvergiert $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig. Nach dem Satz von Weierstraß ist $f(z)$ auf $\operatorname{Re}[z] > 0$ holomorph. \square

Satz 2.11 (Eulers Integraldarstellung). Für $\operatorname{Re}[z] > 0$ gilt

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $z = x$ reell ist; für andere z wird die Aussage aus dem Identitätssatz folgen.

Die Funktionenfolge

$$f_n(t) := \begin{cases} (1 - t/n)^n t^{x-1} & 0 < t \leq n; \\ 0 & t > n; \end{cases}$$

konvergiert punktweise gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t/n)^n t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1},$$

und wird auch dadurch majorisiert:

$$(1 - t/n)^n \leq e^{-t} \text{ für } 0 < t < n.$$

Mit dem Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz) rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt. \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du, \quad (t = nu) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (n\text{-fache partielle Integration}) \\
&= \Gamma(x). \quad (\text{Gau\ss}) \quad \square
\end{aligned}$$

2.4. Die Stirling-Approximation

Wir wollen nun das Wachstum von $\Gamma(z)$ beschreiben und insbesondere die Stirling-Formel herleiten. Der Ausgangspunkt wird die *Digamma-Funktion*, oder logarithmische Ableitung von $\Gamma(z)$, sein:

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right).$$

(Dies folgt aus der Weierstra\ss-Entwicklung $\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1+z/n}$.) Die Ableitung der Digamma-Funktion ist dann die einfacher aussehende Reihe

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}.$$

Diese letzte Reihe werden wir untersuchen.

2.4.1. Exkurs: Die Summenformel von Abel–Plana

Man k\u00f6nnte vermuten, dass $\psi'(z)$ als Reihe \u00fcber $\frac{1}{(n+z)^2}$ durch das entsprechende (und viel einfachere) Integral approximiert werden kann:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+z)^2} dt = \frac{1}{z}.$$

Das ist nur zum Teil der Fall.

Eine genaue Verbindung zwischen Reihe und Integral liefert die *Formel von Abel–Plana* unter einigen technischen Annahmen. Es handelt sich im Prinzip lediglich um eine Anwendung des Residuensatzes, die aber oft sehr n\u00fctzlich sein kann.

Satz 2.12 (Summenformel von Abel–Plana). Sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung von

$$\{z = x + iy : x \geq 0, z \neq 0\},$$

die sich stetig in $z = 0$ fortsetzen lässt. Angenommen:

- (i) Entweder $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ oder $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konvergiert;
- (ii) Für jedes endliche Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} = 0$$

(mildes Wachstum in vertikalen Streifen);

- (iii) Für jedes $x \geq 0$ konvergiert das Integral

$$\int_0^{\infty} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} dy,$$

und im Limes $x \rightarrow \infty$ konvergiert das Integral gegen 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} dy = 0,$$

(mildes Wachstum für $x \rightarrow \infty$).

Dann konvergieren $\sum f(n)$ und $\int f(x) dx$ beide und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

Das Integral rechts sieht kompliziert aus. Wegen des schnell abklingenden Terms $e^{2\pi y} - 1$ im Nenner verhält sie sich in den meisten Anwendungen jedoch sehr gut.

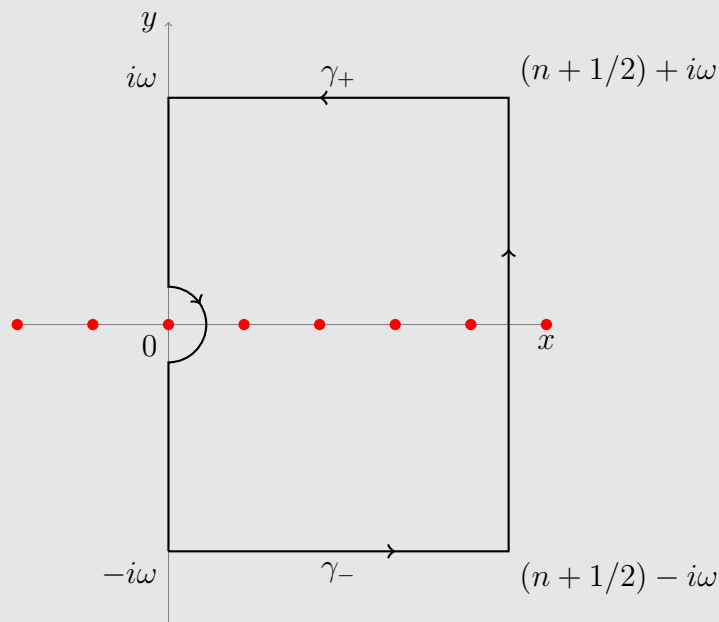
Beweis. Wir berechnen das Integral

$$I(n, \omega) = \oint f(z) \cot(\pi z) dz$$

über das positiv orientierte Rechteck mit Eckpunkten $\pm i\omega$ und $n + 1/2 \pm i\omega$ für $\omega > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Hier muss man das Integral als Cauchyscher Hauptwert auffassen, da der Integrand in $z = 0$ nicht definiert ist. Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$I(n, \omega) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2\pi} f(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n f(k) \right),$$

denn $\cot(\pi z)$ hat einfache Pole in \mathbb{Z} mit Residuum $1/\pi$.



Figur 2.1: Integrationsweg

Seien γ_+ und γ_- die Strecken im Rechteck mit positivem bzw. negativem Imaginärteil. Wir schreiben auf γ_+ bzw. γ_- jeweils

$$i \cot(\pi z) = 1 - \frac{2}{1 - e^{-2\pi iz}} = -1 + \frac{2}{1 - e^{2\pi iz}}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \oint f(z) \cot(\pi z) dz \\ &= \int_{\gamma_+} f(z) \cot(\pi z) dz + \int_{\gamma_-} f(z) \cot(\pi z) dz \\ &= -i \left(\int_{\gamma_+} f(z) dz - \int_{\gamma_-} f(z) dz \right) + 2i \left(\int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{1 - e^{-2\pi iz}} dz - \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{1 - e^{2\pi iz}} dz \right) \\ &= 2i \int_0^{n+1/2} f(x) dx + 2i \left(\int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{1 - e^{-2\pi iz}} dz - \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{1 - e^{2\pi iz}} dz \right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Cauchyschen Integralsatz ($\oint f(z) dz = 0$) eingesetzt haben.

Annahmen (ii) und (iii) garantieren, dass die Integrale über den Strecken in γ_+ und γ_- , die nicht auf der imaginären Achse liegen, gegen 0 mit wachsendem n und ω gehen.

Also ist

$$\begin{aligned}
 if(0) + 2i \sum_{k=1}^{\infty} f(k) &= \lim_{n, \omega \rightarrow \infty} I(n, \omega) \\
 &= 2i \int_0^{\infty} f(x) dx + 2i \int_0^{i\infty} \frac{f(z)}{1 - e^{2\pi iz}} dz - 2i \int_0^{-i\infty} \frac{f(z)}{1 - e^{-2\pi iz}} dz \\
 &= 2i \int_0^{\infty} f(x) dx - 2 \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy.
 \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe genau dann, wenn das Integral das tut, und die Formel folgt mit einer Umordnung. (Beachte: die Reihe in der Behauptung beginnt bei 0, im Beweis aber bei 1.) \square

2.4.2. Die Stirling-Formel

Wir haben schon gesehen, dass die Ableitung der Digamma-Funktion $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ durch die Reihe

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

gegeben ist. Mit der Summenformel von Abel-Plana (mit $f(w) = (w+z)^{-2}$) erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \psi'(z) &= \frac{1}{2z^2} + \int_0^{\infty} \frac{1}{(t+z)^2} dt + i \int_0^{\infty} \frac{(z+iv)^{-2} - (z-iv)^{-2}}{e^{2\pi v} - 1} dv \\
 &= \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \int_0^{\infty} \frac{4vz}{(z^2 + v^2)^2 (e^{2\pi v} - 1)} dv.
 \end{aligned}$$

$\psi(z)$ ergibt sich formal dadurch, dass man den Integranden durch seine Stammfunktion ersetzt:

$$\psi(z) = A - \frac{1}{2z} + \text{Log}(z) - \int_0^{\infty} \frac{2v}{(z^2 + v^2)(e^{2\pi v} - 1)} dv,$$

mit einer unbekanntenen Konstanten A .

Da $\psi(z)$ als logarithmische Ableitung von Γ definiert war, erhalten wir $\text{Log} \Gamma(z)$ (zumindest formal) wieder als Stammfunktion:

$$\text{Log} \Gamma(z) = Az + B + (z - 1/2)\text{Log}(z) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\text{Arctan}(v/z)}{e^{2\pi v} - 1} dv.$$

In der letzten Gleichung setzen wir $\text{Re}[z] > 0$ voraus, da die Arctan-Funktion (zunächst) nur auf der Halbebene $\text{Re}[z] > 0$ definiert und holomorph ist.

Dass die obigen Gleichungen tatsächlich gelten, sieht man durch zweimaliges Ableiten; man erhält genau den vorhin gefundenen Ausdruck für $\psi(z)$.

Wir haben mittlerweile einige merkwürdige Rechnungen gemacht: wir haben ohne viel Motivation eine Summenformel eingeführt und verwendet, um die Reihe

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

in ein Integral umzuformen, das am Ende eigentlich weniger begreiflich ist als das Ausgangsintegral $\int_0^{\infty} e^{-tz} t^{-1} dt$. Haben wir überhaupt etwas gewonnen?

Ja: denn von dieser neuen Darstellung kann man sogar (fast) sofort die Asymptotik ablesen. Wenn man sich z.B. auf reelles $z = x$ beschränkt, dann ist

$$0 \leq \arctan(v/x) \leq \pi/2$$

und damit ist der ‘Fehlerterm’ $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(v/x)}{e^{2\pi v} - 1} dv$ auch beschränkt; und im Limes $x \rightarrow \infty$ geht er sogar gegen 0 (anschaulich wegen $\arctan(1/\infty) = \arctan(0) = 0$). Allgemeiner zeigt man ohne viel Mühe

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re}[z] > 0}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(v/z)}{e^{2\pi v} - 1} dv = 0.$$

Das Wachstumsverhalten von $\ln \Gamma(x)$ ist also durch

$$\ln \Gamma(x) \sim Ax + B + (x - 1/2) \ln(x)$$

gegeben, und das von $\Gamma(x)$ durch

$$\Gamma(x) \sim x^{x-1/2} e^{Ax+B}.$$

Wenn wir nichts weiteres vorhätten, dann wären nur noch die Konstanten A und B zu bestimmen. Wir wollen aber $\Gamma(z)$ genauer beschreiben.

Definition 2.13.

$$H(z) := 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(v/z)}{e^{2\pi v} - 1} dv, \quad \operatorname{Re}[z] > 0$$

heißt *Binet-Integral*.

N.B.: Mit $\operatorname{Arctan}(z)$ ist der sogenannte Hauptzweig des Arkustangens gemeint:

$$\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right),$$

wobei Log Hauptzweig des Logarithmus ist.

N.B. Eine alternative Darstellung für $H(z)$ geht auf Gudermann zurück:¹

$$H(z) = \int_0^\infty \frac{\lfloor t \rfloor - t + 1/2}{t + z} dt = \sum_{n=0}^\infty \left[(z + n + 1/2) \operatorname{Log} \left(\frac{z + n + 1}{z + n} \right) - 1 \right].$$

Dass beide Integrale dieselbe Funktion darstellen, ist nicht offensichtlich.

$H(z)$ ist also eine Art Fehlerterm zur Stirling-Approximation von $\Gamma(z)$:

$$\operatorname{Log} \Gamma(z) = Az + B + (z - 1/2) \operatorname{Log}(z) + H(z), \quad \operatorname{Re}[z] > 0.$$

Lemma 2.14. Die Konstanten oben sind $A = -1$ und $B = \ln(\sqrt{2\pi})$. Damit gilt die **Stirling-Approximation**

$$\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z+\ln(\sqrt{2\pi})} = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \times \left(\frac{z}{e}\right)^z.$$

Beweis. (i) Sei $z = x$ positiv reell. Aus $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ folgt

$$\ln \Gamma(x+1) = \ln(x) + \ln \Gamma(x).$$

Also:

$$A(x+1) + B + (x+1/2) \ln(x+1) + H(x+1) = \ln(x) + Ax + B + (x-1/2) \ln(x) + H(x)$$

und damit

$$A = (x+1/2)(\ln(x) - \ln(x+1)) + H(x) - H(x+1).$$

Im Limes $x \rightarrow \infty$ gehen $H(x), H(x+1)$ gegen 0, also

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1/2)(\ln(x) - \ln(x+1)) = -1.$$

(ii) Sei jetzt $z = iy$ rein-imaginär mit $y > 0$. Mit dem Ergänzungssatz in der Form

$$|\Gamma(1/2 + iy)|^2 = \Gamma(1/2 + iy)\Gamma(1/2 - iy) = \frac{\pi}{\cos(\pi iy)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}$$

erhalten wir

$$\operatorname{Log} \Gamma(1/2 + iy) + \operatorname{Log} \Gamma(1/2 - iy) = \ln(\pi) - \ln(\cosh(\pi y)).$$

Also:

$$\begin{aligned} & - (1/2 + iy) + B + iy \operatorname{Log}(1/2 + iy) + H(1/2 + iy) \\ & - (1/2 - iy) + B - iy \operatorname{Log}(1/2 - iy) + H(1/2 - iy) \\ & = \ln(\pi) - \ln(\cosh(\pi y)). \end{aligned}$$

¹Vgl. Lemma IX.3.10 im Vorlesungsskript von Krieg

Mit einer Umformung und unter Verwendung der Identität

$$i \cdot \operatorname{Log}(1/2 + iy) - i \cdot \operatorname{Log}(1/2 - iy) = -2 \arctan(2y)$$

erhalten wir

$$2B - 1 - \ln(\pi) = 2y \arctan(2y) - \ln(\cosh(\pi y)) - H(1/2 + iy) - H(1/2 - iy).$$

Im Limes $y \rightarrow \infty$ gehen $H(1/2 \pm iy) \rightarrow 0$, sowie

$$\lim_{y \rightarrow \infty} 2y \arctan(2y) - \ln(\cosh(\pi y)) = -1 + \ln(2)$$

(z.B. mit Regel von L'Hospital nachrechnen). Also ist

$$2B - 1 - \ln(\pi) = -1 + \ln(2)$$

und damit $B = \ln(\sqrt{2\pi})$. □

Die *Stirling-Reihe* erhält man durch Approximation des Integrals $H(z)$. Dazu schreiben wir $\arctan(v/z)$ als Laurent-Reihe um $z = 0$:

$$\arctan(v/z) = \frac{v}{z} - \frac{v^3}{3z^3} + \frac{v^5}{5z^5} - \frac{v^7}{7z^7} \pm \dots$$

und vertauschen Reihe und Integral. (Danach überlegen wir, inwiefern das gerechtfertigt ist.) **Formal** ist also

$$\begin{aligned} H(z) &\approx 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^{\infty} \frac{v^{2n+1}}{e^{2\pi v} - 1} dv \cdot z^{-2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^{\infty} v^{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi kv} dv \cdot z^{-2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^{-2n-2} \int_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-t} dt \cdot z^{-2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(2n+2) \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n+2}} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Hier ist $\zeta(k) = 1 + 1/2^k + 1/3^k + 1/4^k + \dots$. Wir werden in einem späteren Kapitel die Werte $\zeta(2n)$ näher untersuchen und sehen, dass sich die obige Reihe zu

$$H(z) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} = \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} \pm \dots$$

vereinfacht, wobei B_n die *Bernoulli-Zahlen* bezeichnen:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

etwa

$$B_0 = 1, B_1 = 1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, B_5 = 0, B_6 = 1/42, \dots$$

Diese Reihe konvergiert nirgendwo! Denn $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ hat bereits den endlichen Konvergenzradius 2π (wegen Pol von $\frac{z}{e^z-1}$ in $2\pi i$). Damit sieht man, dass $\sum \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} z^n$ den Konvergenzradius 0 hat. Das war ohnehin klar, da die zugehörige Funktion

$$H(1/z) = \text{Log}\Gamma(1/z) - (z - 1/2)\text{Log}(z) + z - \ln(\sqrt{2\pi})$$

Singularitäten in jedem Punkt $-1/n$ hat und in keiner Umgebung von $z = 0$ holomorph ist. Die Vertauschung von Integral und Reihe war in diesem Fall **nicht** zu rechtfertigen.

Die Reihe ist eine sog. *asymptotische Reihe*: für die Partialsummen

$$H_N(z) := \sum_{n=1}^N \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}}$$

gilt

$$\lim_{\substack{\text{Re}[z] > 0 \\ |z| \rightarrow \infty}} z^N (H(z) - H_N(z)) = 0.$$

Dazu schreibt man $\text{Arctan}(v/z)$ nicht als Taylor-Reihe, sondern als Taylor-Polynom plus Restglied. Außerdem liegt $H(x)$ (für $x > 0$ reell) immer zwischen den Approximationen $H_N(x)$ und $H_{N+1}(x)$, da die asymptotische Reihe alternierend ist.

Es gilt zum Beispiel: $\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} \leq H(x) \leq \frac{1}{12x}$ für alle $x > 0$, d.h.

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} (x/e)^x \cdot e^{\frac{1}{12x} - \theta_x} \quad \text{mit einer Konstanten} \quad 0 \leq \theta_x \leq \frac{1}{360x^3}.$$

Beispiel. Es gilt $\Gamma(10) = 9! = 362880$. Die Approximation

$$\sqrt{\frac{2\pi}{10}} (10/e)^{10} \cdot e^{\frac{1}{120} - \frac{1}{360000} + \frac{1}{126000000}}$$

mit 3 Termen der Stirling-Reihe ist zwar etwas größer als $\Gamma(10)$. Der relative Fehler ist aber höchstens

$$1 - e^{-\frac{1}{1680 \cdot 10^7}} \approx 5,95 \cdot 10^{-11}.$$

In der Tat ergibt unsere Approximation den Wert 362880,00002.

N.B. Die gleichmäßige Approximation $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi/z} (z/e)^z$ gilt nicht nur in der rechten Halbebene, sondern auch in jedem Winkelbereich:

$$W_\delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\text{Arg}(z)| < \pi - \delta\}$$

in dem Sinne, dass der Fehlerterm den gleichmäßigen Grenzwert

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in W_\delta}} H(z) = 0$$

hat. Das beweist man z.B. mit der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Die Approximation wird allerdings in der Nähe der negativen reellen Achse sehr schlecht.

2.5. Die Multiplikationsformel

Wir haben inzwischen vier grundlegende Darstellungen der Γ -Funktion kennengelernt: die Gauß-Darstellung (bzw. das Weierstraß-Produkt); das Euler-Produkt; Eulers Integral; und die Stirling-Formel.

Die Γ -Funktion erfüllt eine Vielzahl anderer Identitäten, die oft für Anwendungen wichtig sind. Wir führen nur einige aus.

Eine geschlossene Form wie $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ wird man für allgemeine Werte von $\Gamma(z)$ an rationalen Zahlen leider nicht finden. Man kann allerdings eine einfache Formel für gewisse Produkte von Γ -Werten angeben.

Lemma 2.15. *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt asymptotisch*

$$\frac{(mN)!}{(N!)^m} \sim \frac{m^{Nm+1/2}}{(2\pi N)^{(m-1)/2}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Explizit ist hier die Behauptung:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2\pi N)^{(m-1)/2}}{m^{Nm+1/2}} \times \frac{(mN)!}{(N!)^m} = 1.$$

Wir schreiben allgemein $a(N) \sim b(N)$, wenn $\lim_{N \rightarrow \infty} a(N)/b(N) = 1$.

Beweis. Nach Stirling-Formel ist

$$N! = N \cdot \Gamma(N) \sim \sqrt{2\pi N} \cdot (N/e)^N,$$

also

$$(mN)! \sim \sqrt{2\pi mN} \cdot (mN/e)^{mN}$$

und

$$\frac{(mN)!}{(N!)^m} \sim \frac{\sqrt{2\pi mN}}{(\sqrt{2\pi N})^m} \cdot \frac{(mN/e)^{mN}}{(N/e)^{mN}} = \frac{m^{Nm+1/2}}{(2\pi N)^{(m-1)/2}}. \quad \square$$

Satz 2.16 (Multiplikationsformel). *Für $m \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $-mz \notin \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{j}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2} m^{1/2-mz} \Gamma(mz).$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2) &= 2^{1-2z}\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z); \\ \Gamma(z)\Gamma(z + 1/3)\Gamma(z + 2/3) &= 3^{1/2-3z} \cdot 2\pi \cdot \Gamma(3z).\end{aligned}$$

Beweis. Wir verwenden die Gauß-Darstellung

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z \cdot N!}{z(z+1)\dots(z+N)}$$

und schreiben

$$\begin{aligned}& \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(z + j/m) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (N!)^m \cdot \prod_{j=0}^{m-1} \frac{N^{z+j/m}}{(z + j/m)(z + j/m + 1)\dots(z + j/m + N)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (N!)^m N^{1+1/m+\dots+(m-1)/m} \cdot \frac{N^{mz} m^{m(N+1)}}{mz(mz+1)\dots(mz+mN+m-1)},\end{aligned}$$

sowie (nach Substitution $N \mapsto mN$)

$$\Gamma(mz) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(mN)^{mz} \cdot (mN)!}{mz(mz+1)\dots(mz+mN)}.$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}& \frac{\Gamma(mz)}{\Gamma(z)\Gamma(z + 1/m)\dots\Gamma(z + (m-1)/m)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(mN)!}{(N!)^m} \cdot \frac{(mN)^{mz}}{N^{mz} m^{m(N+1)} N^{1+1/m+\dots+(m-1)/m}} \cdot \frac{mz(mz+1)\dots(mz+mN+m-1)}{mz(mz+1)\dots(mz+mN)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m^{Nm+1/2}}{(2\pi N)^{(m-1)/2}} \cdot \frac{m^{mz}}{m^{m(N+1)} N^{m-1}} \cdot (mz+mN+1)\dots(mz+mN+m-1) \\ &= m^{mz-m+1/2} (2\pi)^{(1-m)/2} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(mN+mz+1)\dots(mN+mz+m-1)}{N^{m-1}}.\end{aligned}$$

In der zweiten “=” wurde das Lemma eingesetzt. Der verbleibende Limes ist einfach $m^{(m-1)}$. Also ist

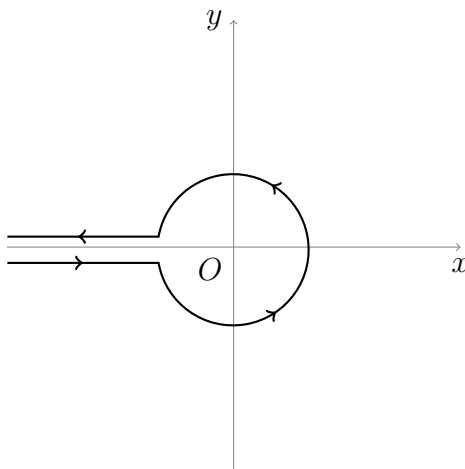
$$\Gamma(mz) = m^{mz-1/2} (2\pi)^{(1-m)/2} \cdot \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(z + j/m). \quad \square$$

2.6. Das Schlüsseloch-Integral

Hankels Darstellung der Γ -Funktion sieht auf dem ersten Blick ähnlich wie das Euler'sche Integral aus. Sein Integral stellt aber das Inverse $\frac{1}{\Gamma(z)}$ dar, und es konvergiert auch für *alle* $z \in \mathbb{C}$. Darum ist diese Darstellung (obwohl sie etwas komplizierter aussieht) in manchen Anwendungen nützlicher.

Ein **Hankel-Integrationsweg** oder **Schlüsseloch-Integrationsweg** ist ein Weg $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, der aus den folgenden Teilwegen besteht:

- (i) Eine Gerade von $-\infty - i\varepsilon$ nach $x - i\varepsilon$ für irgendein $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) Ein stetiger Weg von $x - i\varepsilon$ nach $x + i\varepsilon$, der nie die nicht-positive reelle Achse überquert;
- (iii) Eine Gerade von $x + i\varepsilon$ nach $-\infty + i\varepsilon$.



Figur 2.2: Integrationsweg $\int_{-\infty}^{(0+)}$

In der Praxis werden Hankel-Wege dann verwendet, wenn das Integral nicht von der Wahl der Kontur abhängt. (Der Cauchy'sche Integralsatz reicht hierfür allein nicht aus, da der Integrationsweg nicht geschlossen ist. Unabhängigkeit gilt z.B. wenn der Integrand im Limes $z \rightarrow -\infty$ hinreichend schnell abklingt.) In diesem Fall schreibt man auch

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-\infty}^{(0+)} f(z) dz.$$

Die Notation der rechten Seite beschreibt ein Kurvenintegral mit Anfang und Ende in $-\infty$, das einmal den Punkt 0 positiv umläuft.

Satz 2.17 (Hankel-Darstellung).

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} w^{-z} e^w dw.$$

Das Integral konvergiert lokal gleichmäßig auf ganz $z \in \mathbb{C}$.

N.B. Wenn man $t = -w$ definiert und z durch $1 - z$ ersetzt, erhält man den bekannten Ausdruck im Integral:

$$\frac{e^{\pi iz}}{\Gamma(1 - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Integriert wird über einen nach rechts offenen Schlüsselloch-Weg. Vorsicht: t^{z-1} ist hier **nicht** der Hauptzweig!

Beweis. Für $z = x + iy$ haben wir

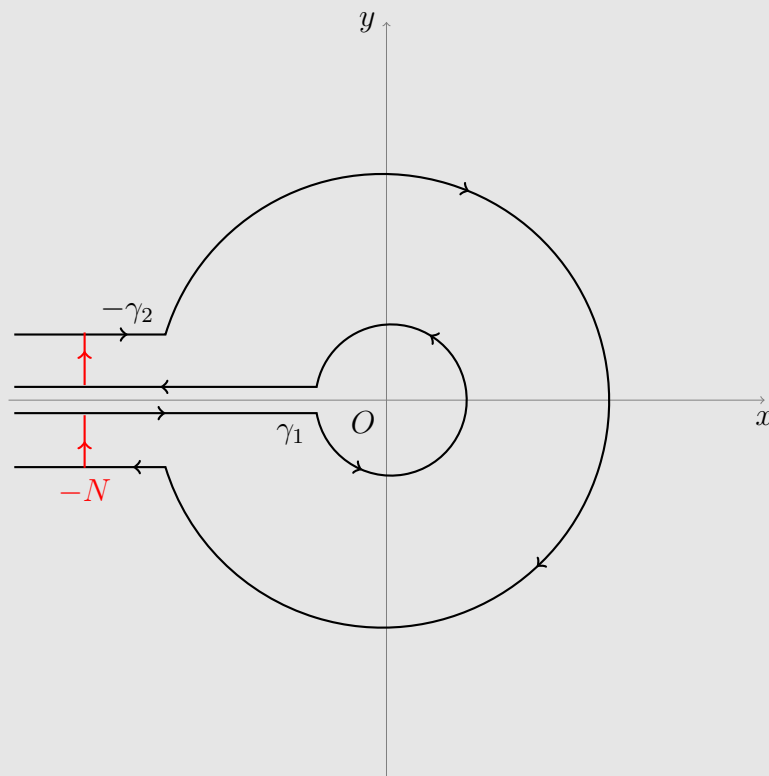
$$|w^{-z} e^w| = e^{\operatorname{Re}[w] + y \operatorname{Arg}(w)} |w|^{-x} \leq e^{\pi y} \cdot e^{\operatorname{Re}[w]} |w|^{-x}.$$

Die obere Schranke wird exponentiell klein bei $\operatorname{Re}[w] \rightarrow -\infty$. Also konvergieren die Integrale über die Geraden,

$$\int_{-\infty \pm i\varepsilon}^{x \pm i\varepsilon} w^{-z} e^w dw,$$

und damit auch das gesamte Integral, absolut und lokal gleichmäßig in z .

Wir wollen zeigen, dass das Integral nicht vom Weg abhängt. Dazu seien γ_1, γ_2 zwei Schlüsselloch-Wegen. Wir zeichnen einen vertikalen Streifen $x = -N$ ($N > 0$ hinreichend groß) zwischen γ_1 und $-\gamma_2$ ein (vgl. Abbildung):



Figur 2.3: Vergleich zweier Schlüsselloch-Integrale

Das Integral über die so entstehende geschlossene Kurve ergibt nach dem Cauchy'schen Integralsatz 0. Also ist $\int_{\gamma_1} w^{-z} e^w - \int_{\gamma_2} w^{-z} e^w$ gleich dem Integral von $w^{-z} e^w$ über die zwei im Bereich $\text{Re}[w] \leq -N$ liegenden Rechtecken. Mit unserer Abschätzung sieht man, dass das verbleibende Integral im Limes $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Somit definiert das Integral eine ganze Funktion in z , die nicht von der Wahl des Schlüsselloch-Weges abhängt.

Um das Integral tatsächlich zu berechnen, nehmen wir $\text{Re}[z] < 1$ an. Wir lassen den Radius von dem inneren Kreis gegen 0 gehen, sodass der Integrationsweg nur noch aus zwei Geraden besteht: erstens die negative reelle Achse $\mathbb{R}_{<0}$, positiv orientiert, und zweitens $\mathbb{R}_{<0}$ **negativ** orientiert. Hier ist zu beachten, dass $w^{-z} e^w$ dabei gegen zwei unterschiedliche Zweige der Funktion tendiert: im ersten Integral wird $e^{-z(\ln(-w)-\pi i)} \cdot e^w$ integriert und im zweiten $e^{-z(\ln(w)+\pi i)} \cdot e^w$. Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{(0+)} w^{-z} e^w dw &= \int_{-\infty}^0 e^{-z(\ln(-w)-\pi i)} e^w dw + \int_0^{-\infty} e^{-z(\ln(-w)+\pi i)} e^w dw \\
 &= e^{\pi iz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-z} dt - e^{-\pi iz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-z} dt \quad (t = -w) \\
 &= (e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}) \Gamma(1 - z) \\
 &= 2i \sin(\pi z) \Gamma(1 - z).
 \end{aligned}$$

Nach dem Eulerschen Ergänzungssatz ist der letzte Ausdruck $\frac{2\pi i}{\Gamma(z)}$. □

2.7. Charakterisierungssätze

Die Γ -Funktion ist nicht die einzige holomorphe Funktion, die die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(1) = 1$ genügt. Das tut auch $\Gamma(z)\phi(z)$ für jede 1-periodische Funktion $\phi(z)$ mit $\phi(1) = 1$. Unter einigen milden Nebenbedingungen ist $\Gamma(z)$ jedoch eindeutig charakterisiert.

Satz 2.18 (Bohr–Mollerup). *Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine Funktion mit*

$$f(x+1) = xf(x), \quad f(1) = 1.$$

Angenommen, $\log f(x)$ ist konvex. Dann gilt $f \equiv \Gamma$.

Dazu müssen wir nicht mal annehmen, dass f stetig ist, geschweige denn holomorph. N.B. Dass $\Gamma(z)$ selbst logarithmisch konvex ist, folgt sofort aus der Reihendarstellung von $\frac{d^2}{dz^2} \text{Log } \Gamma(z) = \psi'(z)$:

$$\psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} > 0, \quad x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.19 (Wielandt). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge U , die den abgeschlossenen Streifen*

$$S = \{z = x + iy : 1 \leq x \leq 2\}$$

*enthält. Angenommen, f ist auf S **beschränkt** und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$f(z+1) = zf(z) \text{ und } f(1) = 1, \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } z, z+1 \in U.$$

Dann gilt $f(z) = \Gamma(z)$.

N.B. Aus der Euler-Integraldarstellung sieht man, dass $\Gamma(x+iy)$ durch $\Gamma(x)$ beschränkt ist:

$$|\Gamma(x+iy)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} |t^{iy}| dt = \Gamma(x).$$

Beweis. Sei $h(z) := f(z) - \Gamma(z)$. Durch die Funktionalgleichung $h(z+1) = zh(z)$ wird h holomorph auf die Halbebene $\operatorname{Re}[z] > 0$ fortgesetzt, und durch $h(z) = \frac{1}{z}h(z+1)$ auf die Halbebene $\operatorname{Re}[z] \leq 1$; die dadurch definierte Funktion ist sogar ganz, denn $h(1) = 0$. Mit $h(z)$ ist auch $h(1-z)$ auf dem Streifen S beschränkt: denn $h(1-z)$ ist im Kompaktum $\{1 \leq x \leq 2, |y| \leq 1\}$ als stetige Funktion beschränkt, und für $|y| > 1$ gilt

$$|h(1-z)| = \frac{|h(3-z)|}{|(1-z)(2-z)|} \leq |h(3-z)| \leq \sup_{z \in S} |h(z)|.$$

Die ganze Funktion $H(z) := h(z)h(1-z)$ ist also auch beschränkt in S . Da aber

$$H(z+1) = h(z+1)h(-z) = zh(z) \cdot \frac{h(1-z)}{-z} = -H(z),$$

ist H auf ganz \mathbb{C} beschränkt und damit konstant. Mit $H(1) = h(1)h(0) = 0$ folgt $H \equiv 0$. Insbesondere muss $h(z) = 0$ für überabzählbar viele Werte von z gelten, also $h \equiv 0$ nach dem Identitätssatz. \square

3. Die Laplace-Transformation

Das Laplace-Integral kann man sich als “kontinuierliche” Variante der Potenzreihe vorstellen. Statt der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

schreiben wir ein Integral hin:

$$\int_0^{\infty} f(t) z^t dt.$$

Dieses Integral hat den offensichtlichen Nachteil, dass es sich in der Nähe von $z = 0$ wegen der beliebigen reellen Potenzen z^t i.A. nicht gut verhalten kann. Darum schreiben wir stattdessen $z = e^{-s}$ und erhalten das Integral

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Die Laplace-Transformation $f \mapsto \mathcal{L}[f]$ hat die wichtige Eigenschaft, dass sie die Ableitung in eine algebraische Operation (Multiplikation mit s) überführt, und damit Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen verwandelt. Außerdem ist sie für viel allgemeinere Funktionen als z.B. die Fourier-Transformation wohldefiniert. Deswegen wird sie oft in der angewandten Mathematik verwendet. Wir führen sie vor allem wegen Anwendungen auf Integraldarstellungen spezieller Funktionen und Asymptotik ein.

3.1. Die Laplace-Transformation

3.1.1. Definition

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

eine stückweise stetige Funktion, für die $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt und $|f|$ auf einer Umgebung von 0 integrierbar ist.

Definition 3.1. Die **Laplace-Transformierte** von f ist das Integral

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Beispiel 3.2. Für $f(t) = e^{at}$ konvergiert das Integral

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

genau dann, wenn $\operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a]$, und es ist $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-a}$.

Bemerkung 3.3. Schon an dieser Stelle wollen wir das Integral $\mathcal{L}[f]$ zu einem Stieltjes-Integral umschreiben:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_\varepsilon^N e^{-st} dF(t)$$

mit

$$F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

Nun kann F auch eine beliebige Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sein, die auf kompakten Intervallen beschränkte Variation hat, und die $F(t) \equiv 0$ ($t < 0$) erfüllt.

Der Vorteil besteht darin, dass man $\mathcal{L}[f](s)$ z.B. für die “Funktion” $f(t) = \delta(t - a)$, $a \geq 0$ genauso behandeln kann. Der Integrator wäre die Sprungfunktion

$$F(t) = H(t - a) = \begin{cases} 0 & : t < a; \\ 1 & : t \geq a; \end{cases}$$

und die Laplace-Transformierte ist $\mathcal{L}[f](s) = e^{-as}$. Hier ist $H(t)$ die *Heaviside-Funktion*.

In dieser Allgemeinheit spricht man eigentlich von der *Laplace–Stieltjes-Transformation*. Wir verwenden aber (solange es nicht zu Verwirrung führt) die Schreibweise

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t), \quad F(t) := \int_0^t f(x) dx,$$

sodass z.B.

$$\mathcal{L}[\delta](s) := \int_0^\infty e^{-st} dH(t) = 1$$

ist.

Beispiel 3.4. Neben dem gewöhnlichen Fall $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ werden wir uns für den folgenden Fall interessieren. Sei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ eine monoton steigende Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$; sei a_1, a_2, \dots eine (beliebige) komplexe Folge und definiere

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(t - \lambda_n),$$

mit der “Stammfunktion”

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(t - \lambda_n) = \sum_{\lambda_n \leq t} a_n.$$

Die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

heißt **verallgemeinerte Dirichlet-Reihe**. Hiervon sind zwei noch speziellere Fälle erwähnenswert:

(1) $\lambda_n = n$ (oder genau genommen $\lambda_n = n - 1$), also

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta(t - n).$$

Dann ist

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit der Substitution $z = e^{-s}$.

(2) $\lambda_n = \log(n)$. Dann heißt

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

einfach **Dirichlet-Reihe**.

3.1.2. Konvergenz

Satz 3.5. *Angenommen, das Laplace-Integral*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

konvergiert in einem Punkt $\sigma \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert das Integral in der Halbebene

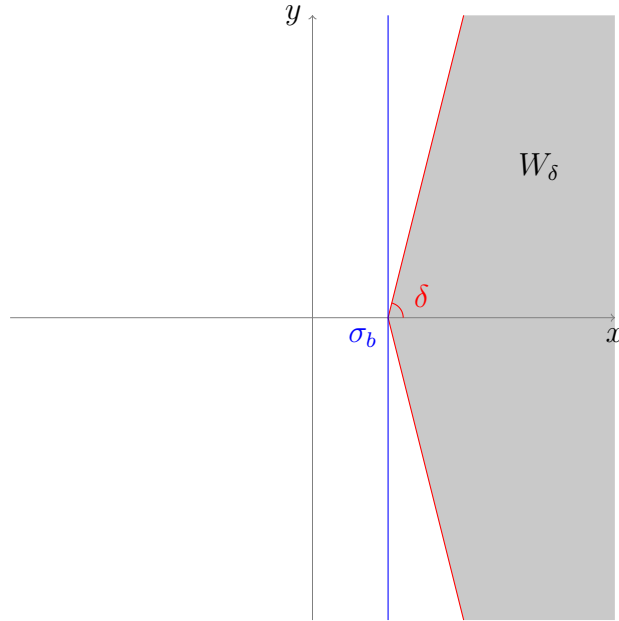
$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}[s] > \sigma\},$$

die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem Winkelbereich:

$$W_\delta = \{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(s - \sigma)| \leq \delta\}, \quad 0 < \delta < \pi/2,$$

und $\mathcal{L}[f]$ ist dort holomorph.

$\mathcal{L}[f]$ konvergiert also entweder auf ganz \mathbb{C} , nirgendwo, oder in einer rechten Halbebene (evtl. mit Randpunkten).



Figur 3.1: Winkelbereich W_δ

Das Infimum

$$\sigma_b = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \mathcal{L}[f](\sigma) \text{ konvergiert}\}$$

heißt **Abszisse der bedingten Konvergenz** von $\mathcal{L}[f]$. Natürlich kann σ_b auch $\pm\infty$ sein.

Entsprechend definieren wir mit

$$\sigma_a = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \mathcal{L}[|f|](\sigma) \text{ konvergiert}\}$$

die **Abszisse der absoluten Konvergenz** von $\mathcal{L}[f]$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\mathcal{L}[f](\sigma)$ konvergiert, gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$\left| \int_a^b e^{-\sigma t} dF(t) \right| < \varepsilon \quad \text{für } a, b > t_0.$$

Sei

$$G(t) := - \int_t^\infty e^{-\sigma x} dF(x)$$

sodass $dG(t) = e^{-\sigma t} dF(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{-st} dF(t) \\ &= \int_a^b e^{-(s-\sigma)t} \cdot e^{-\sigma t} dF(t) \\ &= \int_a^b e^{-(s-\sigma)t} dG(t) \\ &= e^{-(s-\sigma)b} G(b) - e^{-(s-\sigma)a} G(a) + (s-\sigma) \int_a^b e^{-(s-\sigma)t} G(t) dt. \end{aligned}$$

Für t_0 hinreichend groß sind $|G(a)|, |G(b)| < \varepsilon$ sowie

$$\left| (s-\sigma) \int_a^b e^{-(s-\sigma)t} G(t) dt \right| < |s-\sigma| \varepsilon \cdot \int_a^b e^{-(\operatorname{Re}[s]-\sigma)t} dt < \frac{|s-\sigma|}{\operatorname{Re}[s]-\sigma} \cdot \varepsilon.$$

Im Winkelbereich W_δ können wir abschätzen:

$$\frac{|s-\sigma|}{\operatorname{Re}[s]-\sigma} \leq \frac{1}{\cos \delta}.$$

Also ist die Konvergenz dort gleichmäßig. Die Holomorphie von $\mathcal{L}[f]$ erhalten wir aus dem Satz von Weierstraß. \square

3.1.3. Rechenregeln

Für die Laplace-Transformation gelten die folgenden Rechenregeln:

1. Linearität:

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g], \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

2. Für $f_a(t) := f(at)$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\mathcal{L}[f_a](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f](s/a).$$

3. Für

$$f_\lambda(t) := \begin{cases} f(t-\lambda) & : t \geq \lambda; \\ 0 & : \text{sonst;} \end{cases}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\mathcal{L}[f_\lambda](s) = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f](s).$$

4. Angenommen, f ist differenzierbar und der Limes $f(0+) := \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existiert. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0+).$$

5. Für $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ ist

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f](s).$$

6. Sei $g(t) = t \cdot f(t)$. Dann ist

$$\mathcal{L}[g](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s).$$

7. Sei $g(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Dann ist

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](u) du,$$

falls das Integral konvergiert.

Zum Beweis braucht man nur die elementaren Eigenschaften des Integrals (z.B. partielle Integration).

Die Multiplikation von konvergenten Potenzreihen ist durch das Cauchy-Produkt beschrieben:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m.$$

Für allgemeine Laplace-Integrale ist die analoge Formel die **Faltung**:

$$\mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[f * g], \quad f * g(t) := \int_0^t f(t-u)g(u) du.$$

Diese Formel ist dort gültig, wo $\mathcal{L}[f](s)$ und $\mathcal{L}[g](s)$ beide **absolut** konvergieren. Für Stieltjes-Integrale lautet die Formel

$$\left(\int_0^\infty e^{-st} dF(t) \right) \left(\int_0^\infty e^{-st} dG(t) \right) = \int_0^\infty e^{-st} dH(t)$$

mit

$$H(t) = \int_0^t F(t-u) dG(u) = \int_0^t G(t-u) dF(u).¹$$

Beispiel 3.6. (i) Schreibt man $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ und $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, dann erhalten wir mit den Rechenregeln

$$\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{1+s^2}$$

¹Als Stieltjes-Integral ist $H(t)$ nicht wohldefiniert in Punkten t , für die $F(t-u)$ und $G(u)$ eine gemeinsame Unstetigkeitsstelle besitzen. Für diese t definiert man die Faltung $H(t)$ durch einen Limes.

und

$$\mathcal{L}[\sin](s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{1+s^2}.$$

Beide haben Konvergenzabszisse $\sigma_b = 0$. Wegen $\sin'(t) = \cos(t)$ erhält man $\mathcal{L}[\cos]$ aus $\mathcal{L}[\sin]$ nach Multiplikation mit s .

Allgemeiner hat $\cos(bt)$ die Laplace-Transformierte $\frac{s}{b^2+s^2}$ und $\sin(bt)$ die Laplace-Transformierte $\frac{b}{b^2+s^2}$.

(ii) Für $f(t) = \frac{\sin(bt)}{t}$ ist die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[\sin(bt)](u) du = \int_s^\infty \frac{b}{b^2+u^2} du = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s/b).$$

Hier ist $\sigma_b = 0$. Im Limes $s \rightarrow 0$ erhalten wir **formal** das berühmte **Dirichlet-Integral**

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \text{unabhängig von } b;$$

die Rechtfertigung für diesen Schritt kommt aber erst in einem späteren Abschnitt.

(iii) Sei $f(t) = \log(t)$. Für $\text{Re}[s] > 0$ konvergiert

$$\mathcal{L}[\log](s) = \int_0^\infty e^{-st} \log(t) dt.$$

Für reelles s erhalten wir mit der Substitution $u = t/s$:

$$\mathcal{L}[\log](s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-t} (\log(t) - \log(s)) dt = -\frac{\log(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-t} \log(t) dt.$$

Das Integral rechts berechnen wir, indem wir $\log(t) = \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=1} t^{z-1}$ schreiben:

$$\int_0^\infty e^{-t} \log(t) dt = \frac{d}{dz} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma'(1) = -\gamma,$$

wobei γ die Euler-Konstante ist. Also:

$$\mathcal{L}[\log](s) = -\frac{\log(s) + \gamma}{s}.$$

3.2. Die Umkehrformel

3.2.1. Satz von Lerch

Wir wollen wissen, inwiefern der Integrator $F(t)$ durch sein Laplace-Integral

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$$

bestimmt ist. Vollkommen eindeutig bestimmt kann $F(t)$ nicht sein, denn $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ gilt z.B. auch dann, wenn sich die Integratoren F und G auf einer Nullmenge unterscheiden. Außerdem ändert sich das Maß dF nicht, wenn wir zu F eine Konstante hinzuaddieren.

Darum machen wir die folgenden Annahmen:

- (1) $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 0$;
- (2) F ist rechtsstetig: $F(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(t+h)$ für jedes t .

Satz 3.7 (Satz von Lerch). *Sei $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf kompakten Intervallen beschränkte Variation hat, die Annahmen (1), (2) erfüllt, und deren Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$ in einem Punkt s_0 konvergiert. Angenommen, es gibt eine Zahl $\lambda > 0$ mit*

$$\mathcal{L}[f](s_0 + \lambda n) = 0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dann ist $F \equiv 0$.

Mit anderen Worten: die Werte von $\mathcal{L}[f]$ in einer beliebigen arithmetischen Folge reichen aus, um die Funktion F eindeutig zu bestimmen (unter diesen Annahmen).

Beweis. Sei $G(t)$ die stetige Funktion

$$G(t) := - \int_t^\infty e^{-s_0 u} dF(u),$$

sodass $dG(t) = e^{-s_0 t} dF(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$.

Gegeben ist dann

$$0 = \mathcal{L}[f](s_0 + \lambda n) = \int_0^\infty e^{-\lambda n t} e^{-s_0 t} dF(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda n t} dG(t)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit der Substitution $u = e^{-\lambda t}$ erhalten wir

$$\int_0^1 u^n dH(u) = 0, \quad \text{mit } H(u) = G(-\log(u)/\lambda).$$

Da $\lim_{u \rightarrow 0} H(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$, erhalten wir nach partieller Integration:

$$\int_0^1 u^n H(u) du = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Hier ist $H(u)$ stetig.

Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit

$$|P(u) - \overline{H}(u)| < \varepsilon, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Wegen $\int_0^1 P(u)H(u) du = 0$ folgt

$$\int_0^1 |H(u)|^2 du = \int_0^1 H(u)\overline{H(u)} du = - \int_0^1 H(u)(P(u) - \overline{H(u)}) du$$

und damit

$$\int_0^1 |H(u)|^2 du < \varepsilon \int_0^1 |H(u)| du.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, ist $\int_0^1 |H(u)|^2 du = 0$ und $H \equiv 0$.

Also ist auch

$$G(t) = - \int_t^\infty e^{-s_0 u} dF(u) \equiv 0$$

identisch 0. Da F rechtsstetig ist, muss F dann konstant sein. (Sonst sei o.B.d.A F reell; dann finden wir ein t und ein $r > 0$ mit $F(t+h) > F(t)$ oder $F(t+h) < F(t)$ für alle $h < r$, und Vergleichen von $G(t+r)$ und $G(t)$ führt zum Widerspruch.) Nach Annahme (1) ist $F \equiv 0$. \square

Korollar 3.8. (i) Seien

$$D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad D_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

Dirichlet-Reihen, die auf einer arithmetischen Folge $s = s_0 + n\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) konvergieren und die gleichen Werte annehmen. Dann gilt $a_n = b_n$ für jedes n .

(ii) Sei f eine stückweise stetige Funktion. Dann kann $\mathcal{L}[f](s)$ in **keiner** Halbebene als (auch verallgemeinerte) Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ entwickelt werden.

Mit dem Eindeutigkeitssatz von Lerch sind wir prinzipiell in der Lage, lineare Differentialgleichungen zu lösen, indem wir die Laplace-Transformation anwenden und die so entstehende algebraische Gleichung lösen.

Beispiel 3.9. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$f''(z) + f(z) = \cos(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Wir setzen $\phi = \mathcal{L}[f]$. Dann sind

$$\mathcal{L}[f'] = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0+) = s\phi(s)$$

und

$$\mathcal{L}[f''](s) = s \cdot \mathcal{L}[f'](s) - f'(0+) = s^2\phi(s)$$

und

$$\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{s}{1 + s^2},$$

d.h.

$$(1 + s^2)\phi(s) = \frac{s}{1 + s^2} \Rightarrow \phi(s) = \frac{s}{(1 + s^2)^2}.$$

An dieser Stelle erkennt man eventuell, dass

$$\phi(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds} \frac{1}{1 + s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin](s)$$

gilt, und mit den Rechenregeln für \mathcal{L} erhalten wir $\phi = \mathcal{L}[f]$ für die Lösung $f(z) = \frac{1}{2}z \sin(z)$.

Es wäre schöner, eine allgemeine Formel zum Invertieren von \mathcal{L} zu haben.

3.2.2. Die Umkehrformel

Es gibt mindestens zwei Ansätze, eine holomorphe Funktion als Potenzreihe,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n,$$

zu entwickeln.

(1) Durch Integrieren (Cauchy-Formel):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|<\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz;$$

(2) Durch Ableiten (Taylor-Formel):

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w).$$

Wenn wir $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ als “kontinuierliche” Potenzreihenentwicklung ansehen wollen, dann sollten wir uns auch vorstellen können, dass die Funktion $f(t)$ mit ähnlichen Methoden zurückzugewinnen ist. Das Analogon der Cauchy-Formel wird **Bromwich-Integral** oder **Bromwich-Wagner-Integral** oder aber auch **Fourier-Mellin-Integral** genannt:

Satz 3.10 (Laplace-Umkehrformel). Sei $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion von beschränkter Variation auf Kompakten und definiere $F(t) := 0$ für $t < 0$. Das Laplace-Integral

$$\phi(s) := \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

habe absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a < \infty$. Für jedes $\alpha > \max(0, \sigma_a)$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\phi(s)}{s} e^{st} ds = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(t+h) + F(t-h)}{2}.$$

Mit PV ist der Cauchy'sche Hauptwert gemeint; das Integral muss also als *symmetrisch* gegen ∞ gehendes uneigentliches Integral aufgefasst werden:

$$\text{PV} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\phi(s)}{s} e^{st} ds := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{\phi(s)}{s} e^{st} ds.$$

Spezialfall: Falls F stetig differenzierbar ist und $F'(t) = f(t)$, dann ist

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \phi(s) e^{st} ds = f(t), \quad t > 0, \alpha > \sigma_a.$$

(Man leite die allgemeine Umkehrformel nach t ab, mit einem Vertauschen von Ableitung und Integralzeichen.) Hier muss man sogar nicht mehr $\alpha > 0$ annehmen, im Prinzip schon deswegen, dass s nicht mehr im Nenner vorkommt.

Beweis. Mit partieller Integration erhält man

$$\phi(s) = s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt.$$

Also gilt, für jedes $T > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{\phi(s)}{s} e^{st} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \int_0^\infty e^{-su} F(u) e^{st} du ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty F(u) \left(\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} e^{s(t-u)} ds \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(u) e^{\alpha(t-u)} \cdot \frac{\sin(y(t-u))}{t-u} du. \end{aligned}$$

Hier haben wir den Satz von Fubini verwendet sowie die Annahme $\alpha > \sigma_a$. Die Behauptung folgt mit Substitution $u \mapsto u + t$ und mit dem folgenden Lemma der reellen Analysis für

$$g(x) := \begin{cases} F(t+x)e^{-\alpha x} & : x > -t; \\ 0 & : x \leq -t. \end{cases} \quad \square$$

Lemma 3.11. Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$ eine integrierbare Funktion, mit beschränkter Variation auf Kompakten. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \right).$$

Der Beweis wird später angegeben. Er kann auch übersprungen werden.

Beispiel 3.12. Sei $\operatorname{Re}[\alpha] > 0$.

(i) Mit

$$F(t) = \begin{cases} 1 & : t > 0; \\ 0 & : t < 0; \end{cases}$$

und $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = e^0 = 1$ erhalten wir

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{e^{st}}{s} ds = \begin{cases} 1 & : t > 0; \\ 1/2 & : t = 0; \\ 0 & : t < 0. \end{cases}$$

(ii) Mit

$$F(t) = \begin{cases} t & : t > 0; \\ 0 & : t < 0; \end{cases}$$

und $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = 1/s$ erhalten wir

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{e^{st}}{s^2} ds = \begin{cases} t & : t > 0; \\ 0 & : t \leq 0. \end{cases}$$

Beispiel 3.13 (Perron-Formel). Sei

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine Dirichlet-Reihe mit absoluter Konvergenzabszisse $\sigma_a < \infty$. Dann ist $D = \mathcal{L}[f]$ für $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(t - \ln(n))$, bzw. $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(t - \ln(n))$. Mit der Umkehrformel erhalten wir für $t \neq \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\ln(n) \leq t} a_n = F(t) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{PV} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{D(s)}{s} e^{st} ds,$$

bzw. mit $x = e^t$:

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iy}^{\alpha+iy} \frac{D(s)}{s} x^s ds.$$

Wenn $x = n \in \mathbb{N}$, muss der Term a_n mit Vorfaktor $1/2$ gezählt werden.

Manchmal ist das Integral in der Laplace-Umkehrformel mit dem Residuensatz leicht zu berechnen. Wir formulieren hier einen solchen Fall explizit:

Proposition 3.14. Sei $\phi : \{\operatorname{Re}[s] > \sigma_a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Angenommen,
 (i) $\phi(s)$ hat eine analytische Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} bis auf isolierte Singularitäten in den Punkten s_1, s_2, \dots ;
 (ii) Es existiert eine Folge $(r_n) \rightarrow \infty$ mit

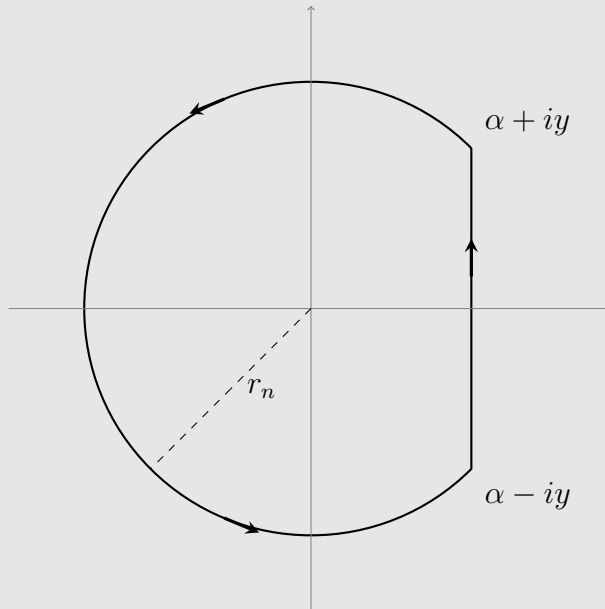
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|s|=r_n} |\phi(s)| = 0.$$

Dann gilt für $t > 0$ und $\alpha > \sigma_a$:

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname{PV} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \phi(s) e^{st} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=s_n} (\phi(s) e^{st}).$$

Die Kreise $|z| = r_n$ in (iii) können natürlich durch andere Integrationswege ersetzt werden, z.B. Rechtecke.

Beweis. Sei o.B.d.A. $r_n > \alpha$ für alle n . Wir ergänzen Geraden-Abschnitte der Form $[\alpha - iy, \alpha + iy]$ durch Kreisbogen zu geschlossenen Kurven wie in der folgenden Figur:



Figur 3.2: Integrationsweg

Das Integral ist nach dem Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \phi(s) e^{st} ds = \sum_{|s| < r_n} \operatorname{Res}_s (\phi(s) e^{st}).$$

Wir lassen n gegen ∞ gehen. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|s|=r_n} |\phi(s)| = 0$, folgt nach dem Lemma von Jordan:

$$\int_{\gamma_{r_n}} \phi(s) e^{st} ds = 0$$

für jedes $t > 0$. Dabei ist γ_{r_n} das Kreissegment links von der Gerade $\operatorname{Re}[s] = \alpha$. Also ist

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iy}^{\alpha+iy} \phi(s) e^{st} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=s_n} (\phi(s) e^{st}). \quad \square$$

Beispiel 3.15. Im Beispiel vorher hatten wir $\phi(s) = \frac{s}{(1+s^2)^2}$ und die Lösung f zu $\mathcal{L}[f] = \phi$ gesucht. ϕ hat Pole zweiter Ordnung in $s = \pm i$. Wegen

$$\phi(s-i)e^{(s-i)t} = \frac{1}{s^2} \left(\frac{s-i}{(s-2i)^2} e^{(s-i)t} \right) = \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{i}{4} e^{-it} + \frac{it}{4} e^{-it} \cdot s + \dots \right)$$

und

$$\phi(s+i)e^{(s+i)t} = \frac{1}{s^2} \left(\frac{s+i}{(s+2i)^2} e^{(s+i)t} \right) = \frac{1}{s^2} \cdot \left(-\frac{i}{4} e^{it} - \frac{it}{4} e^{it} \cdot s + \dots \right)$$

erhalten wir

$$f(t) = \operatorname{Res}_{s=i}(\phi(s)e^{st}) + \operatorname{Res}_{s=-i}(\phi(s)e^{st}) = \frac{it}{4} e^{-it} - \frac{it}{4} e^{it} = \frac{1}{2} t \sin(t).$$

3.2.3. Anhang: Beweis vom Lemma

Wir beweisen hier das verallgemeinerte Lemma von Riemann–Lebesgue, das im Beweis der Umkehrformel verwendet wurde:

Lemma. Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$ eine integrierbare Funktion von beschränkter Variation auf Kompakten. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) \right).$$

Tatsächlich gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^b g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) \right)$$

für beliebige $a, b > 0$. Daraus folgt sofort das Lemma, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man $a = b$ so groß wählen, dass

$$\int_b^{\infty} \left| g(\pm x) \frac{\sin(Nx)}{x} \right| dx \leq \frac{1}{b} \int_b^{\infty} |g(\pm x)| dx < \varepsilon$$

gilt. Wir beweisen diese stärkere Behauptung.

Beweis. Es genügt zu zeigen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x),$$

denn das eigentliche Integral können wir als Summe

$$\int_0^b g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx + \int_0^a g(-x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx$$

aufspalten. Da g beschränkte Variation hat, können wir g als Differenz zwei monoton steigender Funktionen schreiben; o.B.d.A. dürfen wir annehmen, g ist monoton steigend. Außerdem dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, denn es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta \in [0, b]$ mit $|g(x)| < \varepsilon$ für $0 < x < \delta$. Wir schreiben

$$\int_0^b g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \int_0^\delta g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx + \int_\delta^b \frac{g(x)}{x} \sin(Nx) dx.$$

(i) Nach dem klassischen Lemma von Riemann–Lebesgue ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_\delta^b \frac{g(x)}{x} \sin(Nx) dx = 0,$$

weil die Funktion

$$\begin{cases} g(x)/x : & \delta \leq x \leq b; \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

in $L^1(\mathbb{R})$ liegt.

(ii) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi = \xi_N \in [0, \delta]$ mit

$$\int_0^\delta g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx = g(\xi) \int_\xi^\delta \frac{\sin(Nx)}{x} dx.$$

Dabei ist $\int_\xi^\delta \frac{\sin(Nx)}{x} dx = \int_{N\xi}^{N\delta} \frac{\sin(x)}{x} dx$ beschränkt in N , weil $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Wir erhalten

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \int_\xi^\delta g(x) \frac{\sin(Nx)}{x} dx \right| \leq \varepsilon \cdot \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \int_{N\xi}^{N\delta} \frac{\sin(x)}{x} dx \right|.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist der Limes 0. □

3.3. Ein Stetigkeitssatz

Für viele Anwendungen braucht man Zusammenhänge zwischen der Konvergenz einer Funktionsfolge $(f_n)_n$ und der Konvergenz ihrer Folge von Laplace-Transformierten $(\mathcal{L}[f_n])_n$.

Der folgende technische Satz erlaubt für monotone Integratoren F_n bzw. nichtnegative f_n (unter einer Zusatzannahme) die Vertauschung von Grenzprozess und Laplace-Transformation.

Satz 3.16. Sei $(F_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge monoton steigender, nichtnegativer Funktionen. Seien

$$\phi_n(s) = \mathcal{L}[f_n](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_n(t)$$

ihre Laplace-Transformierten. Angenommen, alle ϕ_n konvergieren in einer gemeinsamen Halbebene $\{s : \operatorname{Re}[s] > \sigma_0\}$.

(i) Angenommen, der punktweise Grenzwert $F(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t)$ existiert.

Angenommen, die Folge $\phi_n(\sigma_1)$ ist beschränkt in einem Punkt $\sigma_1 > \sigma_0$.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t), \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_1.$$

(ii) Angenommen, der punktweise Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\sigma) = \phi(\sigma)$ existiert für $\sigma > \sigma_0$. Dann existiert eine monoton steigende Funktion F mit

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t),$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t)$ in jeder Stetigkeitsstelle t von F .

Beweis. (i) Sei $M > 0$ mit $\phi_n(\sigma_1) < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt in jeder Stetigkeitsstelle x von F

$$\left| \int_0^x e^{-st} dF_n(t) - \int_0^x e^{-st} dF(t) \right| < \varepsilon, \quad n \text{ hinreichend groß.}$$

Außerdem gilt

$$\left| \int_x^\infty e^{-\sigma t} dF_n(t) \right| \leq e^{-(\sigma-\sigma_1)x} \int_x^\infty e^{-\sigma_1 t} dF_n(t) \leq M e^{-x(\sigma-\sigma_1)},$$

und für $\sigma > \sigma_1$ können wir x so groß wählen, dass $M e^{-x(\sigma-\sigma_1)} < \varepsilon$. Für jedes solche x gilt dann

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\sigma) \geq \int_0^x e^{-\sigma t} dF(t) - \varepsilon, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\sigma) \leq \int_0^x e^{-\sigma t} dF(t) + \varepsilon,$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\sigma) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\sigma) \leq 2\varepsilon,$$

und damit konvergiert $(\phi_n(\sigma))_{n \geq 1}$ punktweise für $\sigma > \sigma_1$. Im Limes $x \rightarrow \infty$ erhält man den Wert

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} dF(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\sigma).$$

(ii) Sei o.B.d.A $\phi \not\equiv 0$ und sei $\sigma > \sigma_0$ eine Abszisse mit $\phi(\sigma) \neq 0$. Wir definieren die Funktionen

$$\tilde{F}_n(t) := \phi_n(\sigma)^{-1} \int_0^t e^{-\sigma u} dF_n(u),$$

bzw. $d\tilde{F}_n(t) = \phi_n(\sigma)^{-1} e^{-\sigma t} dF_n(t)$, sodass

$$\int_0^\infty d\tilde{F}_n(t) = \phi_n(\sigma)^{-1} \int_0^\infty e^{-\sigma t} dF_n(t) = 1.$$

(Dabei ist auch $\phi_n(\sigma)^{-1} \neq 0$ für hinreichend große n .) Die Konvergenz $F_n \rightarrow F$ ist dann äquivalent zu

$$\tilde{F}_n \rightarrow \tilde{F}, \quad d\tilde{F}(t) = \phi(\sigma)^{-1} e^{-\sigma t} dF(t).$$

Auf dieser Weise können wir auf den Fall reduzieren, dass alle F_n durch 1 beschränkt sind: $\lim_{t \rightarrow \infty} F_n(t) = 1$.

Nach dem Auswahlssatz von Helly besitzt die Folge $(F_n)_{n=1}^\infty$ eine punktweise konvergente Teilfolge $(F_{n_k})_{k=1}^\infty$ mit Grenzfunktion F . Nach (i) gilt für jede solche Teilfolge

$$\mathcal{L}[f](s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{n_k}(s) = \phi(s).$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz von Lerch ist F als Urbild (fast) eindeutig bestimmt: in jeder Stetigkeitsstelle t von F konvergiert *jede* konvergente Teilfolge von $F_n(t)$ gegen $F(t)$. Mit dem Satz von Bolzano–Weierstraß sieht man, dass die gesamte Folge $F_n(t)$ dort gegen $F(t)$ konvergiert. \square

3.4. Randverhalten

Die Laplace-Transformation wird oft dafür eingesetzt, um das Wachstum einer Funktion zu verstehen. Falls die Funktion $f(t)$ eine Schranke der Form $f(t) \leq e^{\rho t}$ genügt, sieht man leicht, dass das Laplace-Integral

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

in der offenen Halbebene $\operatorname{Re}[s] > \rho$ konvergiert.

Wenn wir ρ minimal wählen (also $\rho = \sigma_b$), könnte man vermuten, dass $f(t)$ ungefähr wie ein Vielfaches von $e^{\sigma_b t}$ wächst.

Das ist meistens richtig aber in der Regel doch schwer zu beweisen. Die Beziehungen zwischen der Abszisse σ_b und die analytischen Eigenschaften von $\mathcal{L}[f]$ sind i.A. etwas

subtil. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die Konvergenz von $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ **im Punkt** $s = \sigma_b$ zu untersuchen.

Nach einem Satz von Landau kann das Laplace-Integral einer nichtnegativen Funktion **nie** auf eine Umgebung von $s = \sigma_b$ holomorph fortgesetzt werden:

Satz 3.17 (Landau). *Angenommen, der Integrator $F(t)$ ist reell und monoton nichtfallend, und das Laplace-Integral $\mathcal{L}[f](s)$ hat endliche Konvergenzabszisse $\sigma_b (= \sigma_a)$. Dann kann $\mathcal{L}[f](s)$ in keine Umgebung von σ_b analytisch fortgesetzt werden.*

Für eine **nichtnegative** Funktion $f(t)$ erkennt man σ_b also daran, dass $\{\operatorname{Re}[s] > \sigma_b\}$ die größte rechte Halbebene ist, auf die $\mathcal{L}[f](s)$ holomorph fortgesetzt werden kann. Die “ δ -Funktion” ist in diesem Sinn auch nichtnegativ. Der Satz gilt damit auch für Dirichlet-Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \mathcal{L}[f](s), \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(t - \lambda_n)$$

mit Koeffizienten $a_n \geq 0$.

N.B. Das heißt nicht, das $\mathcal{L}[f](s)$ z.B. keine stetige Fortsetzung **in den Punkt** $s = \sigma_b$ besitzen darf. Ein Gegenbeispiel wäre die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{n^2}$, die auch auf der geschlossenen Halbebene $\operatorname{Re}[s] \geq \sigma_b = 0$ wohldefiniert und stetig ist.

Beweis. Sei o.B.d.A. $\sigma_b = 0$, denn sonst betrachten wir das Integral

$$\mathcal{L}[f](s + \sigma_b) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t), \quad G(t) = \int_0^t e^{-\sigma_b x} dF(x).$$

Mit $F(t)$ ist $G(t)$ auch monoton nichtfallend.

Angenommen, $\mathcal{L}[f](s)$ besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf eine offene Umgebung von $s = 0$. Dann konvergiert die Taylor-Entwicklung

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - 1)^n$$

im Kreis von Radius $1 + 2\delta$ um $s = 1$ für irgendein $\delta > 0$. (Wenn $\mathcal{L}[f](s)$ im Kreis von Radius $\varepsilon > 0$ um $s = 0$ holomorph ist, dann kann man $\delta = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}{4}$ wählen, vgl. Abbildung.)

Die Koeffizienten sind dabei

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=1} \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} (-t)^n dF(t).$$

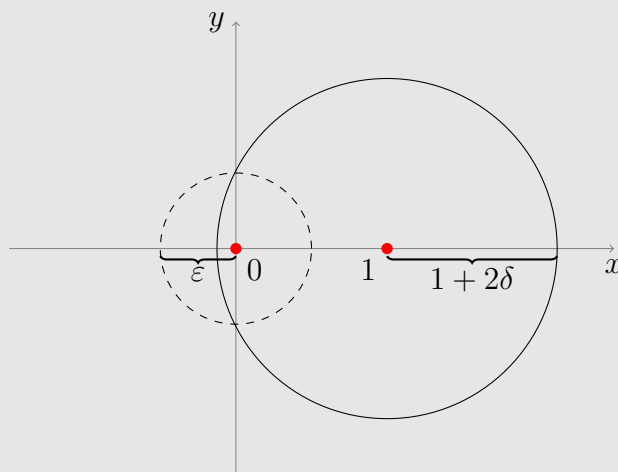
An der Stelle $s = -\delta$ ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dF(t).$$

Die Reihe und das Integral dürfen wir vertauschen, da alle Terme positiv sind (Satz von Fubini–Tonelli). Damit konvergiert

$$\mathcal{L}[f](-\delta) = \int_0^{\infty} e^{-t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^n t^n}{n!} \right] dF(t) = \int_0^{\infty} e^{\delta t} dF(t);$$

ein Widerspruch, denn $\sigma_b = 0$.



Figur 3.3: Potenzreihenentwicklung von $\mathcal{L}[f]$ um $s = 1$.

□

Der Satz von Landau beschreibt allerdings nicht das Verhalten von $\phi(s) = \mathcal{L}[f](s)$ **im** Punkt $s = \sigma_b$. Intuitiv ist klar, dass das Verhalten in der Nähe von σ_b mit dem Wachstum von $f(t)$ im Limes $t \rightarrow \infty$ zusammenhängt. In der Literatur gibt es verschiedene Sätze, die man grob in zwei Arten unterteilt:

- (1) **Abel-Sätze:** Hier werden nur Nebenbedingungen an $f(t)$ gestellt.
- (2) **Tauber-Sätze.** Hier werden Nebenbedingungen nur (oder vor allem) an $\phi(s)$ gestellt.

Für unseren Taubersatz brauchen wir den Begriff einer *langsam variierenden Funktion*: eine messbare Funktion $\lambda : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, für die für jedes $a > 0$ der Limes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(at)}{\lambda(t)} = 1$$

ist. Typische Beispiele sind $\lambda(t) = C$ (konstant), $\lambda(t) = \ln(t)$, $\lambda(t) = \ln(\ln(t))$ und so weiter.

Satz 3.18 (Taubersatz von Karamata²). Sei $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine monoton steigende, nichtnegative Funktion. Angenommen,

$$\phi(s) := \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$$

habe Konvergenzabszisse $\sigma_b = 0$. Sei ψ eine langsam variierende Funktion und sei $0 \leq \rho < \infty$. Dann sind äquivalent:

(i)

$$F(t) \sim t^\rho \psi(t), \quad t \rightarrow \infty;$$

(ii)

$$\phi(s) \sim \frac{\Gamma(\rho + 1)}{s^\rho} \cdot \psi(1/s), \quad s \rightarrow 0.$$

Die Implikation (i) \Rightarrow (ii) ist ein Abelsatz; und (ii) \Rightarrow (i) ein Taubersatz.

N.B. Die Rollen von 0 und ∞ können im Satz vertauscht werden: d.h. $F(t) \sim t^\rho \psi(t)$ für $t \rightarrow 0$ genau dann, wenn $\phi(s) \sim \frac{\Gamma(\rho+1)}{s^\rho} \psi(1/s)$ für $s \rightarrow \infty$. Der Beweis ist fast derselbe.

Beweis. (ii) \Rightarrow (i): Aus Bedingung (ii) folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(xs)}{\phi(x)} = s^{-\rho} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(1/xs)}{\psi(1/s)} = s^{-\rho}.$$

Wir können $\frac{\phi(xs)}{\phi(x)}$ als Laplace-Transformierte

$$\int_0^\infty e^{-st} dF_x(t), \quad F_x(t) := \frac{1}{\phi(x)} F(t/x)$$

schreiben. Die rechte Seite ist

$$s^{-\rho} = \int_0^\infty e^{-st} dG(t), \quad G(t) = \frac{t^\rho}{\Gamma(\rho + 1)}.$$

Nach dem Stetigkeitssatz gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\phi(x)} F(t/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_x(t) = \frac{t^\rho}{\Gamma(\rho + 1)}.$$

Durch die Substitution $x \mapsto t/x$ erhalten wir

$$F(x) \sim \frac{t^\rho}{\Gamma(\rho + 1)} \cdot \phi(t/x) \sim \frac{t^\rho}{\Gamma(\rho + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\rho + 1)}{(t/x)^\rho} \cdot \psi(x/t) = x^\rho \psi(x/t)$$

²Diese genaue Formulierung wurde wahrscheinlich erstmals von Feller angegeben. Vgl. W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, volume II*, 2nd edition (1971) Section XIII.5

und damit auch

$$F(x) \sim x^\rho \psi(x).$$

(i) \Rightarrow (ii): Aus Bedingung (i) folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(xt)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} t^\rho \frac{\psi(xt)}{\psi(x)} = t^\rho, \quad t > 0.$$

Wir fassen $\frac{F(xt)}{F(x)}$ als Funktionsfolge in t auf; die Laplace-Transformierten sind dann

$$\frac{1}{F(x)} \int_0^\infty e^{-st} dF(xt) = \frac{1}{F(x)} \phi(s/x).$$

Andererseits ist

$$\int_0^\infty e^{-st} d(t^\rho) = \rho \int_0^\infty e^{-st} t^{\rho-1} dt = \frac{\Gamma(\rho+1)}{s^\rho}.$$

Um den Stetigkeitssatz zu verwenden, müssen wir zuerst prüfen, dass $(\frac{1}{F(x)} \phi(s/x))_{x>0}$ für jedes $s \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt ist. Dazu schätzen wir das Integral $\phi(s/x)$ durch eine Treppenfunktion mit Träger $2^n x$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\phi(s/x) = \int_0^\infty e^{-st/x} dF(t) \leq \sum_{n=0}^\infty e^{-2^{n-1}s} F(2^n x).$$

Wegen $\frac{F(2x)}{F(x)} \sim 2^\rho$ können wir (für x hinreichend groß) alle $F(2^n x)$ durch $2^{n(\rho+\varepsilon)} F(x)$ abschätzen. Dann ist

$$\frac{\phi(s/x)}{F(x)} \leq \sum_{n=0}^\infty 2^{n(\rho+\varepsilon)} e^{-2^{n-1}s} < \infty$$

beschränkt im Limes $x \rightarrow \infty$.

Also dürfen wir den Stetigkeitssatz verwenden. Wir erhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(s/x)}{F(x)} = \frac{\Gamma(\rho+1)}{s^\rho}.$$

Nach Annahme (i) ist $F(x) \sim x^\rho \psi(x)$, also an der Stelle $s = 1$:

$$\phi(1/x) \sim \Gamma(\rho+1) F(x) \sim \Gamma(\rho+1) x^\rho \psi(x).$$

Die Behauptung (ii) folgt durch Substitution $s = 1/x$. □

Korollar 3.19. Sei F monoton steigend und nichtnegativ, und $\phi(s) := \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$ habe Konvergenzabszisse $\sigma_b > 0$. Sei ψ eine langsam variierende Funktion und $0 \leq \rho < \infty$. Angenommen,

$$F(t) \sim t^\rho e^{\sigma_b t} \cdot \psi(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Dann gilt:

$$\phi(s) \sim \frac{\sigma_b \Gamma(\rho + 1)}{(s - \sigma_b)^{\rho+1}} \cdot \psi(1/s), \quad s \rightarrow \sigma_b.$$

Die Umkehrrichtung ist i.A. **falsch** ohne Zusatzannahmen!

Beweis. Man schreibe $\phi(s + \sigma_b) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$ mit

$$G(t) = \int_0^t e^{-\sigma_b u} dF(u) = F(t) \cdot e^{-\sigma_b t} + \sigma_b \cdot \int_0^t e^{-\sigma_b u} F(u) du.$$

Im Limes $t \rightarrow \infty$ dominiert das Integral:

$$G(t) \sim \sigma_b \cdot \int_0^t t^\rho \psi(t) dt \sim \frac{\sigma_b}{\rho + 1} t^{\rho+1}.$$

Die Behauptung folgt aus dem obigen Abelsatz. □

Beispiel 3.20. Sei (a_n) eine nichtnegative Folge, λ_n eine monoton steigende Folge in $(0, \infty)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ und

$$F(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} a_n$$

mit

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Wir erhalten als Spezialfall den **Taubersatz von Hardy–Littlewood**,

$$\phi(s) \sim \frac{\Gamma(\rho + 1)}{s^\rho} \psi(1/s), \quad s \rightarrow 0$$

genau dann, wenn

$$\sum_{\lambda_n \leq t} a_n \sim t^\rho \psi(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Wenn z.B. $\phi(s)$ auf eine punktierte Umgebung von $s = 0$ holomorph fortsetzbar ist, und einen Pol in $s = 0$ besitzt mit Laurententwicklung

$$\phi(s) = C s^{-n} + O(s^{-n-1}),$$

dann gilt asymptotisch

$$\sum_{\lambda_n \leq t} a_n \sim \frac{C}{n!} t^n.$$

Beispiel 3.21. Sei $\lambda_n = \ln(n)$ und $a_n = 1$, sodass $\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\ln(n)s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die Konvergenzabszisse $\sigma_b = 1$ hat. Dann gilt

$$\sum_{\lambda_n \leq t} a_n = \sum_{n \leq e^t} 1 = [e^t] \sim e^t.$$

Nach dem Korollar hat $\phi(s)$ die Asymptotik

$$\phi(s) \sim \frac{\sigma_b \cdot \Gamma(1)}{(s - \sigma_b)^1} = \frac{1}{s - 1}, \quad s \rightarrow 1.$$

Beispiel 3.22. Im Einheitskreis $|q| < 1$ betrachten wir für $\rho > 0$ die holomorphe Funktion $f(q) := \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^\rho}$. Mit dem Variablenwechsel $q = e^{-y}$ erhalten wir $f(e^{-y}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\rho y}$. Wir wählen $\lambda_n = n^\rho$ und $a_n = 1$. Da

$$\sum_{\lambda_n \leq t} 1 = [t^{1/\rho}] \sim t^{1/\rho}, \quad (t \rightarrow \infty),$$

erhalten wir die Asymptotik

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\rho y} \sim \frac{\Gamma(1 + 1/\rho)}{y^{1/\rho}}, \quad y \rightarrow 0,$$

und damit

$$f(q) \sim \frac{\Gamma(1 + 1/\rho)}{\ln(1/q)^{1/\rho}} \sim \frac{\Gamma(1 + 1/\rho)}{\sqrt[\rho]{1 - q}}, \quad q \rightarrow 1.$$

Insbesondere ist

$$\Gamma(1 + 1/\rho) = \lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^{1/\rho} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^\rho}.$$

3.5. Die Mellin-Transformation

Mellin-Integrale sind eine direkte Verallgemeinerung des Gamma-Integrals $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

Definition 3.23. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion. Die **Mellin-Transformierte** von f ist

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx.$$

Beispiel 3.24. Die Mellin-Transformierte von $f(x) = e^{-x}$ ist $\Gamma(s)$.

Im Mellin-Integral $\int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$ machen wir die Substitution $x = e^t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^t) e^{ts} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(e^t) e^{ts} dt + \int_0^{\infty} f(e^{-t}) e^{-ts} dt \\ &= \mathcal{L}[f_1](s) + \mathcal{L}[f_2](-s) \end{aligned}$$

mit den Funktionen $f_1(t) = f(e^{-t})$ und $f_2(t) = f(e^t)$. Das Mellin-Integral konvergiert genau dann, wenn beide Laplace-Integrale konvergieren. Da Laplace-Integrale bekanntlich in Halbebenen konvergieren, erhalten wir:

Proposition 3.25. *Der Konvergenzbereich eines Mellin-Integrals*

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$$

besteht aus einem vertikalen Streifen

$$\{s \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}[s] < b\}$$

(der auch leer oder in einer oder beiden Richtungen unendlich sein kann) und einer Teilmenge seiner Randpunkte.

Auch der Bereich der absoluten Konvergenz von $\mathcal{M}[f]$ ist ein (i.A. kleinerer) vertikaler Streifen.

Beispiel 3.26. Für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ konvergiert $\mathcal{M}[f](s)$ (absolut) genau im Streifen $0 < \operatorname{Re}[s] < 1$. Die Mellin-Transformierte von $f(x)$ in diesem Streifen erhält man aus einem Schlüsselloch-Integral um die *positive* reelle Achse,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi i(s-1)}} \int_\infty^{(0+)} \frac{z^{s-1}}{1+z} dz \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i s}} \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z^{s-1}}{1+z}; z = -1\right) \\ &= -2\pi i \cdot \frac{e^{-\pi i s}}{1 - e^{-2\pi i s}} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \Gamma(s)\Gamma(1-s), \end{aligned}$$

oder auch als Spezialfall des sog. *Beta-Integrals* (vgl. Übungsaufgaben) mit $x = \frac{t}{1-t}$.

Die Formel zur Umkehrung der Mellin-Transformation erhält man fast unmittelbar aus der Umkehrformel für die Laplace-Transformation:

Satz 3.27 (Mellin-Umkehrformel). *Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Das Mellin-Integral*

$$\phi(s) := \mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$$

konvergiere **absolut** im Streifen $a < \operatorname{Re}[s] < b$. Für jedes $c \in (a, b)$ und $x > 0$ gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \operatorname{PV} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} x^{-s} \phi(s) ds.$$

Beweis. Setze $x = e^{-t}$ und schreibe wie oben $\phi(s) = \phi_1(s) + \phi_2(s)$ mit $\phi_1(s) = \mathcal{L}[f_1](s)$ und $\phi_2(s) = \mathcal{L}[f_2](-s)$. Mit der Umkehrformel für das Laplace-Integral erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \text{PV} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts} \phi_1(s) \, ds = \begin{cases} f_1(t) : & t > 0; \\ \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f_1(t) : & t = 0; \\ 0 : & t < 0; \end{cases}$$

sowie (nach einer Substitution $s \mapsto -s$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \cdot \text{PV} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts} \phi_2(s) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \text{PV} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} e^{-ts} \mathcal{L}[f_2](s) \, ds = \begin{cases} f_2(-t) : & t < 0; \\ \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} f_2(-t) : & t = 0; \\ 0 : & t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

In allen drei Fällen ($t > 0$, $t = 0$, $t < 0$) erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \text{PV} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts} \phi(s) \, ds = f(e^{-t}). \quad \square$$

Beispiel 3.28. Für $f(x) = e^{-x}$ und $\phi(s) = \Gamma(s)$ erhalten wir durch Umkehrung der Integraldarstellung

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx = \mathcal{M}[f](s)$$

das **Cahen–Mellin-Integral**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \Gamma(s) \, ds = e^{-x}, \quad c > 0.$$

In diesem Fall konvergiert das Integral absolut (wir brauchen also nicht den Cauchy'schen Hauptwert), da die Γ -Funktion $\Gamma(c+it)$ für $|t| \rightarrow \infty$ nach der Stirling-Formel exponentiell abklingt.

Wenn man aber entlang vertikalen Streifen mit $c < 0$ integriert, dann liefert die Formel das falsche Ergebnis! Wenn $-N < c < -N + 1$ mit $N \in \mathbb{N}$, dann ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \Gamma(s) \, ds = e^{-x} + \sum_{k=0}^N x^k \text{Res}_{s=-k} \Gamma(s) = e^{-x} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k,$$

entsprechend der Darstellung von $\Gamma(s)$ als Mellin-Transformierte in **diesem** Streifen,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) x^{s-1} \, dx, \quad -N < \text{Re}[s] < -N + 1.$$

(Diese Darstellung von $\Gamma(s)$ nennt man das *Integral von Cauchy–Saalschütz*.)

4. Die Zeta-Funktion

4.1. Definition und Funktionalgleichung

Die **Riemann'sche Zeta-Funktion** ist die Dirichlet-Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Sie konvergiert (auch absolut) in der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 1$ nach dem Integralkriterium und definiert als Dirichlet-Reihe dort eine analytische Funktion.

$\zeta(s)$ ist das Objekt der analytischen Zahlentheorie schlechthin. Die zahlentheoretische Bedeutung von $\zeta(s)$ beruht auf ihrer **Eulerprodukt-Entwicklung** in der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 1$, in der die Primzahlen auftauchen:

Satz 4.1. *In der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 1$ besitzt $\zeta(s)$ die Produktentwicklung*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Insbesondere ist $\zeta(s)$ dort nullstellenfrei, da kein Faktor $\frac{1}{1-p^{-s}}$ eine Nullstelle hat.

Beweis. Das Produkt $\prod_p (1 - p^{-s})$ konvergiert absolut, da man die Majorante

$$\sum_{p \text{ prim}} p^{-s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s), \quad \operatorname{Re}[s] > 1$$

findet. Wenn p_1, \dots, p_N die ersten N Primzahlen bezeichnen, dann ist das N -te Partialprodukt

$$\prod_{j=1}^N \frac{1}{1 - p_j^{-s}} = \prod_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} (p_j^k)^{-s} = \sum_{n \in P_N} n^{-s},$$

wobei P_N die Menge der Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet, deren Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen p_1, \dots, p_N enthält. Da jede Zahl $n = 1, \dots, N$ in der Menge P_N vorkommt, dürfen wir wie folgt abschätzen:

$$\left| \zeta(s) - \prod_{j=1}^N (1 - p_j^{-s})^{-1} \right| \leq \sum_{n \notin P_N} n^{-s} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Damit ist

$$\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N (1 - p_j^{-s})^{-1} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s})^{-1}. \quad \square$$

Für $\zeta(s)$ gilt eine Funktionalgleichung, die die Werte in s und $1 - s$ verbindet. Dazu müssen wir zuerst ζ für $s \notin \{\operatorname{Re}[s] > 1\}$ definieren:

Proposition 4.2. $\zeta(s)$ hat eine holomorphe Fortsetzung auf $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit höchstens einem einfachen Pol in $s = 1$. Die Fortsetzung ist durch das Schlüsselloch-Integral

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{s-1} dz$$

gegeben.

Zum Integral cf. Hankel-Darstellung von $1/\Gamma(s)$, Satz 2.17.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Hankel-Darstellung in der Tat

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-s} e^z dz = \frac{1}{2\pi i} n^{1-s} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-s} e^{nz} dz,$$

und nach der Substitution $s \mapsto 1 - s$ und Aufsummieren **formal**

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz} \right) dz.$$

Dieses Argument ist fehlerhaft, denn die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz}$ konvergiert auf keinem Schlüsselloch-Weg um 0 überall! Trotzdem ist die Darstellung richtig:

Beweis. Das Integral $\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{s-1} dz$ konvergiert für alle s und definiert eine ganze Funktion (da e^z bei $\operatorname{Re}[z] \rightarrow -\infty$ exponentiell abklingt). Falls $\operatorname{Re}[s] > 0$, dürfen wir den Integrationsweg auf die negative reelle Achse zusammenfallen lassen (wie im Beweis der Hankel-Darstellung von $1/\Gamma(s)$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{s-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{e^z}{1-e^z} (-z)^{s-1} e^{-(s-1)\pi i} dz + \int_0^{-\infty} \frac{e^z}{1-e^z} (-z)^{s-1} e^{(s-1)\pi i} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi(1-s)) \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Hier konvergiert die geometrische Reihe $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$. Wenn s reell und positiv ist, dürfen wir nach dem Satz von Tonelli die Reihe und das Integral vertauschen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{s-1} dz &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi(1-s)) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi(1-s)) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= \zeta(s) \cdot \frac{\sin(\pi(1-s))\Gamma(s)}{\pi} \\ &= \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}. \end{aligned}$$

Für alle andere $s \in \mathbb{C}$ liefert das Integral die (meromorphe) Fortsetzung.

Die möglichen Pole von $\zeta(s)$ liegen in den Polstellen von $\Gamma(1-s)$; also $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Da $\zeta(s)$ in der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 1$ sowieso holomorph ist, gibt es höchstens einen einfachen Pol in $s = 1$. \square

Korollar 4.3. $\zeta(s)$ hat in der Tat einen einfachen Pol bei $s = 1$. Das Residuum von $\zeta(s)$ dort ist 1.

Das haben wir eigentlich bereits als Anwendung vom Taubersatz von Hardy–Littlewood bewiesen. Den Pol erkennt man aber ohne viel Mühe aus der obigen Integraldarstellung:

Beweis. Es gilt

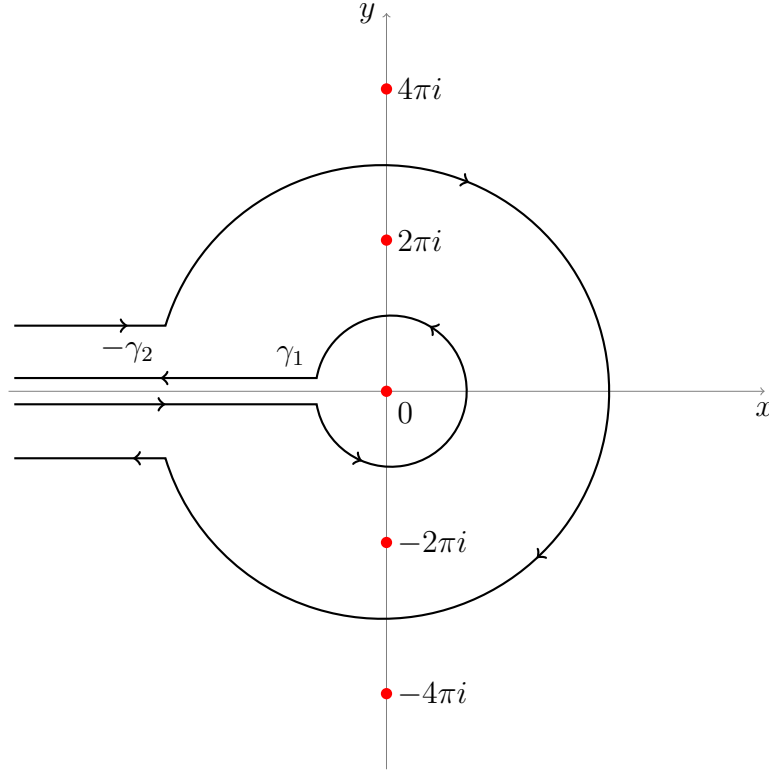
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{e^z}{1-e^z} dz = \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{1-e^z}, z=0\right) = -1$$

für jedes hinreichend kleine ε ; und $\Gamma(1-s)$ hat in $s = 1$ einen einfachen Pol mit Residuum -1 . Damit hat auch $\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{s-1} dz$ einen einfachen Pol in $s = 1$, jetzt mit Residuum 1. \square

Für $\operatorname{Re}[s] > 1$ können wir andererseits den Kreis im Hankel-Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{-s} dz = \frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s)}$$

unendlich groß wählen und das Integral mit dem Residuensatz berechnen, vgl. Figur.



Figur 4.1: Das innere Integral ist $\zeta(1-s)/\Gamma(s)$. Das äußere Integral konvergiert im Grenzübergang Radius $\rightarrow \infty$ gegen 0. Im Bild sind nur die Residuen in $\pm 2\pi i$ erfasst, aber im Limes erhalten wir alle Residuen in $2\pi in$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Das Integral über dem äußeren Kreis konvergiert gegen 0, wenn der Radius groß wird und der Kreis die Polstellen vermeidet (z.B. $|z| = \pi n$ mit n ungerade). Das wird ersichtlich, wenn wir $\frac{e^z}{1-e^z} = -1 + \frac{1}{1-e^z}$ und

$$|1 - e^z|^2 = (1 - e^x)^2 + 2e^x(1 - \cos(y)), \quad z = x + iy$$

schreiben. Mit dem Residuensatz erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{-s} dz \\ &= - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \text{Res}_{z=2\pi in} \left(\frac{e^z}{1-e^z} z^{-s} \right) \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (2\pi in)^{-s} \\ &= \left((2\pi i)^{-s} + (-2\pi i)^{-s} \right) \cdot \zeta(s) \\ &= 2^{1-s} \pi^{-s} \cos(\pi s/2) \zeta(s). \end{aligned}$$

Wir haben bewiesen:

Satz 4.4. Für $\zeta(s)$ gilt die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s).$$

Im Spezialfall $s = n \in \mathbb{N}_0$ ist der Integrand in $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{-n} dz$ meromorph, und das Integral ist einfach das Residuum in $z = 0$:

Satz 4.5. $\zeta(s)$ hat die speziellen Werte

$$\zeta(0) = -1/2 \quad \text{und} \quad \zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hier sind B_n wieder die Bernoulli-Zahlen: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z-1}$. Insbesondere sind $B_n \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Es gilt:

$$\zeta(1-n) = \Gamma(n) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{1-e^z} z^{-n} dz = \Gamma(n) \cdot \text{Res}\left(\frac{e^z}{1-e^z} z^{-n}, z=0\right).$$

Das Residuum ist der Koeffizient a_n in der Entwicklung

$$\frac{e^z}{1-e^z} = -1 + \frac{1}{1-e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-1}.$$

Dieser Koeffizient ist $-1/2$ für $n = 1$ und $-B_n/n!$ sonst. Also ist

$$\zeta(0) = -1/2$$

und

$$\zeta(1-n) = \Gamma(n) \cdot -\frac{B_n}{n!} = -\frac{B_n}{n}, \quad n \geq 1. \quad \square$$

Da $B_{2n+1} = 0$ für ungerade $n \geq 1$, gilt:

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \dots = 0.$$

Diese sind die **trivialen Nullstellen** von $\zeta(s)$. Durch die Funktionalgleichung erhält man die Werte

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi i)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{2n}.$$

Korollar 4.6. Die ***Xi-Funktion*** oder ***vervollständigte Zeta-Funktion***

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

$\xi(s)$ ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ mit einfachen Polen in 0 und 1.

Da $\Gamma(s/2)$ einfache Pole in $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$ hat, gilt $\xi(-2n) \neq 0$.

Beweis. Nach Funktionalgleichung ist

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = 2^{s-1} \pi^{s/2} \frac{\Gamma(s/2)}{\cos(\pi s/2) \Gamma(s)} \cdot \zeta(1-s).$$

Nach dem Eulerschen Ergänzungssatz ist

$$\frac{\pi}{\cos(\pi s/2)} = \Gamma(1/2 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2);$$

also:

$$2^{s-1} \pi^{s/2} \frac{\Gamma(s/2)}{\cos(\pi s/2) \Gamma(s)} = \Gamma(1/2 - s/2) \cdot 2^{s-1} \pi^{s/2-1} \frac{\Gamma(s/2) \Gamma(1/2 + s/2)}{\Gamma(s)}.$$

Nach der Duplikationsformel

$$\Gamma(z) \Gamma(z + 1/2) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z)$$

ist

$$\frac{\Gamma(s/2) \Gamma(1/2 + s/2)}{\Gamma(s)} = 2^{1-s} \sqrt{\pi}.$$

Insgesamt haben wir:

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{s/2-1/2} \Gamma(1/2 - s/2) \zeta(1-s),$$

bzw. $\xi(s) = \xi(1-s)$. Mit $\zeta(s)$ ist $\xi(s)$ holomorph in der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 0$ mit Ausnahme von der einfachen Polstelle $s = 1$; wegen $\xi(s) = \xi(1-s)$ erhalten wir Holomorphie auf ganz \mathbb{C} mit Ausnahme von $s = 1$ und $s = 0$. \square

4.2. Das Hadamard-Produkt

Im ersten Kapitel haben wir Sätze kennengelernt, die das Wachstum einer ganzen Funktion endlicher Ordnung mit der Verteilung seiner Nullstellen verbindet. Wir zeigen hier, dass die ganze Funktion $s(1-s)\xi(s)$ von Exponentialordnung 1 ist. Wegen der Darstellung als Produkt über den Primzahlen

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

hat das bemerkenswerte Konsequenzen für die Primzahlen selbst.

Sei $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ die vervollständigte Zeta-Funktion, sodass $\xi(s) = \xi(1-s)$. Dann ist

$$\xi^*(s) := s(1-s)\xi(s)$$

eine **ganze** Funktion, deren Nullstellen genau die **nicht-trivialen** Nullstellen von $\zeta(s)$ ausmachen (d.h. $s \neq -2n, n \in \mathbb{N}$), und die immer noch die Funktionalgleichung

$$\xi^*(1-s) = \xi^*(s)$$

erfüllt. Außerdem ist

$$\xi^*(1) = \lim_{s \rightarrow 1} (1-s)\xi(s) = \pi^{-1/2}\Gamma(1/2) \lim_{s \rightarrow 1} (1-s)\zeta(s) = -1$$

und $\xi^*(0) = \xi^*(1) = -1$.

Proposition 4.7. $\xi^*(s)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung 1.

Zuerst ein Lemma:

Lemma 4.8. In der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 0$ gilt

$$(2^{1-s} - 1)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}.$$

Beweis. [Beweis von Lemma] Für $\operatorname{Re}[s] > 1$ schreiben wir

$$\begin{aligned} (2^{1-s} - 1)\zeta(s) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n^s. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ konvergiert für $\operatorname{Re}[s] > 0$ nach dem Leibnizkriterium und die Identität gilt auch dort nach Identitätssatz. \square

Beweis. [Beweis von Proposition] Wegen $\xi^*(s) = \xi^*(1-s)$ genügt es, das Wachstum von $\xi^*(s)$ in der Halbebene $\operatorname{Re}[s] \geq 1/2$ zu untersuchen. Mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ ist $(2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ beschränkt in $\operatorname{Re}[s] \geq 1/2$, also wächst $|\zeta(s)|$ höchstens wie 2^s . Das Wachstum von $\Gamma(s/2)$ ist dort nach der Stirling-Formel gegeben: $\Gamma(s) \sim (s/e)^s \cdot \sqrt{2\pi/s}$. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|s|=R \\ \operatorname{Re}[s] \geq 1/2}} \frac{|\xi^*(s)|}{\exp(R^\lambda)} = 0 \quad \text{für jedes } \lambda > 1;$$

d.h. ξ^* ist von Ordnung höchstens 1.

Andererseits gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\zeta(2n) \geq 1$$

und damit

$$\xi^*(2n) = 2n(2n-1)\Gamma(n)\pi^{-n}\zeta(2n) \geq \frac{4n-2}{\pi^n}n! \sim 4\sqrt{2\pi n^3} \cdot \left(\frac{n}{\pi e}\right)^n,$$

sodass die Ordnung mindestens 1 ist. Also hat ξ^* Ordnung genau 1. \square

Wegen der Funktionalgleichung $\xi^*(s) = \xi^*(1-s)$ ist die ganze Funktion

$$f(z) := \xi^*(1/2 + iz)$$

gerade. Damit ist $f(\sqrt{z})$ eine wohldefinierte ganze Funktion der Ordnung $1/2$, mit Nullstellen genau in den Punkten τ_k^2 , falls die nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ in der Form

$$\rho = \frac{1}{2} \pm i\tau_k, \quad \tau_k \in \mathbb{C}$$

geschrieben werden. Ob die Zahlen τ_k reell sind, ist die vielleicht größte offene Frage in der Mathematik überhaupt:

Vermutung 4.9 (Riemann). Für jede nicht-triviale Nullstelle $\frac{1}{2} + i\tau$ von $\zeta(s)$ gilt

$$\tau \in \mathbb{R}.$$

Das werden wir später ausführlicher besprechen.

Hier greift die Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung, und wir erhalten sofort einige Korollare:

Korollar 4.10. $\zeta(s)$ hat unendlich viele nicht-trivialen Nullstellen. Alle liegen im "kritischen Streifen" $0 \leq \operatorname{Re}[s] \leq 1$. Die Reihe

$$\sum_{\rho} |\rho|^{-\lambda}$$

über die nicht-trivialen Nullstellen divergiert für $\lambda < 1$ und konvergiert für $\lambda > 1$.

Denn $f(z)$ hat nichtganze Ordnung $1/2$, und damit auch Konvergenzexponenten genau $1/2$ (vgl. Übungsblatt 3).

Korollar 4.11. $\xi^*(s)$ besitzt die Produktentwicklung

$$\xi^*(1/2 + it) = C \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\tau_k^2}\right), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Korollar 4.12. *Es gilt die **Produktentwicklung von Riemann–Hadamard***

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{s(s-1)\Gamma(s/2)} \times \prod_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ \operatorname{Im}[\rho]>0}} (1-s/\rho)(1-s/\bar{\rho}), \quad s \neq 1, 0, -2n, n \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung hier ist

$$-\xi^*(s) = \prod_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ \operatorname{Im}[\rho]>0}} (1-s/\rho)(1-s/\bar{\rho})$$

und das ist im Wesentlichen eine Umordnung von

$$\xi^*(1/2 + it) = C \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\tau_k^2}\right).$$

Wegen der Identität $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ kommen die nichttrivialen Nullstellen $\rho, \bar{\rho}$ tatsächlich in komplex konjugierten Paaren vor (und Nullstellen, die nicht Realteil $1/2$ haben, treten zu viert auf: $1/2 \pm i\tau$ und $1/2 \pm i\bar{\tau}$). Es bleibt im Wesentlichen zu zeigen, dass ζ keine Nullstellen im *reellen Intervall* $(0, 1)$ besitzt, die gleich ihren komplex Konjugierten wären. Das sieht man am Einfachsten mit der Darstellung

$$\zeta(x) = \frac{1}{2^{1-x} - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -\frac{1}{2^{1-x} - 1} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{2^x}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x}}_{>0} + \dots \right) < 0.$$

4.3. Die exakte Formel

Jetzt werden wir die Produktentwicklungen

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{s(s-1)\Gamma(s/2)} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ |\operatorname{Im}[\rho]| \leq N}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad \operatorname{Re}[s] > 1$$

miteinander vergleichen um die linke Seite besser zu verstehen. Als Erstes bilden wir logarithmische Ableitungen.

Auf der linken Seite haben wir $\frac{d}{ds} \log(1-p^{-s})^{-1} = \frac{\log(p)}{1-p^s} = -\frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}}$ und damit

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p \text{ prim}} \frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = - \sum_{p \text{ prim}} \sum_{n=1}^{\infty} \log(p)p^{-ns} = - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$$

mit der **von Mangoldt-Funktion**

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) : & n = p^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}; \\ 0 : & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf der rechten Seite haben wir:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log(\sqrt{\pi}) - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\psi(s/2) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\xi(\rho)=0 \\ |\operatorname{Im}[\rho]| \leq N}} \frac{1}{s-\rho}$$

mit der Digamma-Funktion $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$. Also:

Proposition 4.13. *In der Halbebene $\operatorname{Re}[s] > 1$ gilt*

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} = \log(\sqrt{\pi}) - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\psi(s/2) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\xi(\rho)=0 \\ -N \leq \operatorname{Im}[\rho] \leq N}} \frac{1}{s-\rho}.$$

Die Reihe können wir als unbedingt konvergente Reihe wie folgt umschreiben. Da die Nullstellen ρ und $\bar{\rho}$ immer paarweise auftreten, ist

$$\begin{aligned} \sum_{|\operatorname{Im}[\rho]| \leq N} \frac{1}{\rho} &= \sum_{0 < \operatorname{Im}[\rho] < N} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \\ &= \sum_{0 < \operatorname{Im}[\rho] < N} \frac{2 \cdot \operatorname{Re}[\rho]}{|\rho|^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist $2 \cdot \operatorname{Re}[\rho]$ durch 2 beschränkt, und die Reihe $\sum \frac{1}{|\rho|^2}$ konvergiert (weil ξ die Ordnung 1 hat), also existiert der Limes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\operatorname{Im}[\rho]| \leq N} \frac{1}{\rho}.$$

Mit der Entwicklung

$$\Gamma(s/2) = \frac{2}{s} e^{-\gamma s/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{s/2n}$$

und ihrer logarithmischen Ableitung

$$\frac{1}{2}\psi(s/2) = -\frac{1}{s} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{s+2n}\right)$$

erhalten wir:

Korollar 4.14. *Für die Konstante*

$$C := \log(\sqrt{\pi}) + \frac{\gamma}{2} - \sum_{\operatorname{Im}[\rho] > 0} \frac{2 \cdot \operatorname{Re}[\rho]}{|\rho|^2}$$

gilt:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = C - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

In der ersten Reihe wird über die *trivialen* Nullstellen von $\zeta(s)$ summiert; in der zweiten über die *nicht-trivialen*.

Durch Einsetzen von $s = 0$ erhält man übrigens $C = \log(2\pi) - 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ ist wieder eine Dirichlet-Reihe, liegt also im Bild der Laplace-Transformation:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mathcal{L}[f](s) \quad \text{für } F(t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \log(n) \leq t}} \Lambda(n).$$

Durch Invertieren der Laplace-Transformation (Perron-Formel) erhalten wir:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds, \quad x \geq 1, x \neq 1, 2, 3, \dots$$

für jedes $\alpha > 1$. Indem wir die Laplace-Transformation auf der rechten Seite invertieren, erhalten wir:

Satz 4.15 (Exakte Formel von Riemann–von Mangoldt). Für $x \geq 1$, $x \neq 1, 2, 3, \dots$ gilt

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \log\left(2\pi\sqrt{1 - 1/x^2}\right) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\xi(\rho)=0 \\ |\operatorname{Im}[\rho]| \leq N}} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Beweis. Im Prinzip invertieren wir die Laplace-Transformation einfach gliedweise. Für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Funktion $\phi(s) := \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{a} \right)$ außerhalb von $s = a$ holomorph, und besitzt die inverse Laplace-Transformation

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} \phi(s) e^{st} ds = \operatorname{Res}_{s=a} \left(\frac{e^{st}}{s} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{a} \right) \right) = \frac{e^{at}}{a}, \quad t > 0, \alpha > \operatorname{Re}[a].$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} \frac{C'}{s} e^{st} ds = C' = \log(2\pi) - 1, \quad t > 0, \alpha > 0,$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} \frac{e^{st}}{s(s-1)} ds = \sum_{w \in \{0,1\}} \operatorname{Res}_{s=w} \left(\frac{e^{st}}{s(s-1)} \right) = e^t - 1, \quad t > 0, \alpha > 1.$$

Wenn wir α hinreichend groß wählen, (etwa $\alpha = 2$), dann erhalten wir **zunächst**

formal:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{e^{st}}{s} ds \\
&= \log(2\pi) - e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nt}}{2n} + \sum_{\rho} \frac{e^{\rho t}}{\rho}, \quad t > 0 \\
&= -e^t + \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(1 - e^{-2t}) + \sum_{\rho} \frac{e^{\rho t}}{\rho}.
\end{aligned}$$

In der Reihe gilt immer die Abschätzung $|e^{\rho t}| \leq e^t$, weil $\operatorname{Re}[\rho] \leq 1$. Die Reihe $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$ konvergiert allerdings eventuell nicht (zumindest nicht absolut). Um das zu verbessern, schreiben wir die Nullstellen ρ und $\bar{\rho}$ zusammen: die Reihe

$$\sum_{\operatorname{Im}[\rho] > 0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) = \sum_{\operatorname{Im}[\rho] > 0} \frac{2 \cdot \operatorname{Re}[\rho]}{|\rho|^2}$$

konvergiert dann absolut, da $0 \leq \operatorname{Re}[\rho] \leq 1$ beschränkt ist. Wir dürfen dann Integral und Reihe nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz vertauschen:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \left(-e^t + \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(1 - e^{-2t}) + \sum_{\operatorname{Im}[\rho] > 0} \frac{e^{\rho t}}{\rho} + \frac{e^{\bar{\rho} t}}{\bar{\rho}} \right) e^{-st} dt \\
&= C' - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\operatorname{Im}[\rho] > 0} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \\
&= \zeta'(s)/\zeta(s).
\end{aligned}$$

Also haben wir mit dieser Anordnung der nicht-trivialen Nullstellen ρ das richtige Urbild unter \mathcal{L} gefunden:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq e^t} \Lambda(n) &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] (t) \\
&= e^t - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - e^{-2t}) - \sum_{\operatorname{Im}[\rho] > 0} \frac{e^{\rho t}}{\rho} \\
&= e^t - \log(2\pi \sqrt{1 - e^{-2t}}) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N \leq \operatorname{Im}[\rho] \leq N} \frac{e^{\rho t}}{\rho}, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit der Substitution $x = e^t$. □

Auf der rechten Seite der exakten Formel haben wir, für jedes **endliche** N , eine

differenzierbare Funktion mit der Ableitung

$$1 + \frac{1}{x - x^3} - \sum_{|\operatorname{Im}[\rho]| \leq N} x^{\rho-1},$$

in dem der Term $\frac{1}{x-x^3}$ gegen 0 abklingt. Wenn wir die Nullstellen in der Form $\rho = \sigma \pm i\omega$ schreiben, erhalten wir

$$\sum_{|\operatorname{Im}[\rho]| \leq N} x^{\rho-1} = 2 \sum_{\omega \leq N} x^{1-\sigma} \cos(\omega \log(x)).$$

Auf der linken Seite haben wir andererseits eine Treppenfunktion, die bei Primzahlpotenzen p^k um $\log(p)$ springt.

Grob zusammengefasst: die nicht-trivialen Nullstellen $\rho = \sigma + i\omega$ der Riemann'schen Zetafunktion induzieren Schwingungen in der Verteilung der Funktion Λ und damit der Primzahlen; dabei bestimmt

- (i) das Imaginärteil ω die Periode der Schwingung;
- (ii) das Realteil σ , wie schnell die Schwingung ausstirbt (wenn überhaupt: sie stirbt genau dann aus, wenn $\sigma < 1$).

Dieser Sachverhalt wird manchmal¹ die *Musik der Primzahlen* genannt.

Bemerkung 4.16. Das Obige kann man konkret machen: die ersten Nullstellen von $\zeta(s)$ kann man in der Tat approximieren anhand der ersten wenigen Primzahlen.² Dazu schauen wir uns zuerst an, um welchen Faktor die Zahlen in der Primzahlfolge wachsen: wenn wir nur 2, 3, 5, 7 betrachten, dann haben $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ und $\frac{7}{5}$ den Durchschnitt $\approx 1,52$. Wenn wir keine weiteren Primzahlen berücksichtigen und nur eine Riemann'sche Nullstelle zur Verfügung hätten, um die Primzahlverteilung zu erklären, dann hätte sie das Imaginärteil

$$\omega = \operatorname{Im}[\rho] \approx \frac{2\pi}{\ln(1,52)} \approx 15,006.$$

Die erste nicht-triviale Nullstelle ist eigentlich $\rho \approx 0,5 + 14,1347\dots i$. Da wir nur die ersten vier (!) Primzahlen für diese Rechnung verwendet haben, ist diese Approximation vielleicht doch nicht so schlecht.

Korollar 4.17. *Angenommen, die Riemann'sche Vermutung ist wahr. Dann ist*

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + R(x)$$

mit einem Fehlerterm, der $R(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt.

¹z.B. Marcus du Sautoy. *Die Musik der Primzahlen: Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik*. Verlag C.H. Beck, München 2003

²Vgl. David Mumford, *The lowest zeros of Riemann's zeta are in front of your eyes*, Blogbeitrag vom 30 Okt. 2014.

Allgemeiner: wenn ζ keine Nullstellen in der Halbebene $\{s : \operatorname{Re}[s] > \alpha\}$ für irgendein $\alpha < 1$ besitzt, so gilt

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x^{\alpha+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Von Approximationen für $\Lambda(n)$ kommt man schnell zu Approximationen für die Primzahlzählerfunktion

$$\pi(x) = \#\{p \leq x : p \text{ prim}\}.$$

Proposition 4.18. *Angenommen, ζ besitzt keine Nullstellen in der Halbebene $\{s : \operatorname{Re}[s] > \alpha\}$ für ein $\alpha < 1$. Sei*

$$\operatorname{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

das logarithmische Integral. Dann gilt

$$\pi(x) = \operatorname{li}(x) + R(x)$$

mit einem Fehlerterm, der $R(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt.

Beweis. Wir beweisen das in zwei Schritten.

(i) In der Funktion

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{p^k \leq x \\ p \text{ prim}}} \ln(p)$$

werden auch Beiträge von Primzahlpotenzen mitgezählt. Wenn wir **nur** über Primzahlen summieren,

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim}}} \ln(p),$$

so ist offenbar $\vartheta(x) \leq \psi(x)$. Andererseits gilt

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p^k \leq x}} \ln(p),$$

mit $\ln(p) \leq \ln(\sqrt{p^k}) \leq \ln(\sqrt{x})$ für jeden Summanden, und damit

$$\psi(x) - \vartheta(x) \leq \sum_{\substack{k \geq 2 \\ 2^k \leq x}} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x}) \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = O(x^{1/2+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

(ii) Man schreibt $\pi(x)$ als Stieltjes-Integral,

$$\pi(x) = \sum_{2 \leq p \leq x} \frac{\ln(p)}{\ln(p)} = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} d\vartheta(t)$$

mit der Treppenfunktion $\vartheta(t)$ aus (i). Mit partieller Integration erhalten wir

$$\pi(x) = \operatorname{li}(x) + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} d(\vartheta(t) - t) = \operatorname{li}(x) + \left(\frac{\vartheta(t) - t}{\ln(t)} \right) \Big|_2^x + \int_2^x \frac{\vartheta(t) - t}{t \ln^2(t)} dt.$$

Mit (i) folgt $\vartheta(t) - t = O(t^{\alpha+\varepsilon})$ und damit

$$\pi(x) = \operatorname{li}(x) + O(x^{\alpha+\varepsilon}). \quad \square$$

Bemerkung 4.19. Das **logarithmische Integral** $\operatorname{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ kann man durch partielle Integration in eine asymptotische Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{li}(x) &= \frac{x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} \\ &= \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \int_2^x \frac{2}{\ln^3(t)} dt \\ &= \dots = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{2x}{\ln^3(x)} + \dots + \frac{\Gamma(k)x}{\ln^k(x)} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}(x)}\right) \end{aligned}$$

für jedes $k \geq 1$. Insbesondere gilt auch die (schlechtere) Approximation $\frac{x}{\ln(x)}$ für $\pi(x)$.

4.4. Der Primzahlsatz

Es ist bis heute nicht mal bewiesen, dass die Nullstellen von ζ in **irgendeinem** abgeschlossenen Streifen $\varepsilon \leq \operatorname{Re}[\rho] \leq 1 - \varepsilon$ liegen.

Die Primzahlzählerfunktion verhält sich dennoch *asymptotisch* wie $\operatorname{li}(x)$. Dieses Ergebnis ist der **Primzahlsatz**. Wir skizzieren einen Beweis.³

Satz 4.20 (Hadamard, de la Vallée Poussin). $\zeta(s)$ besitzt keine Nullstellen **auf** der senkrechten Gerade $\operatorname{Re}[s] = 1$.

Der Clou in diesem merkwürdigen Beweis ist die “Mertens-Ungleichung”

$$3 + 4 \cos(t) + \cos(2t) = 2 \cdot (1 + \cos(t))^2 \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

³Cf. J.E. Littlewood. *The quickest proof of the prime number theorem*. Acta Arith. **18** (1971), 83–86

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest. Für jedes $\sigma > 1$ schreiben wir

$$\ln \zeta(\sigma) = \ln \left(\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-\sigma}} \right) = \sum_{p \text{ prim}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-n\sigma}$$

sowie

$$\ln |\zeta(\sigma + it)| = \sum_{p \text{ prim}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-n(\sigma+it)} \right] = \sum_{p \text{ prim}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-n\sigma} \cos(nt \ln(p)).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \ln \left(\zeta(\sigma)^3 \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \right) \\ &= \sum_{p \text{ prim}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-n\sigma} \underbrace{\left(3 + 4 \cos(nt \ln(p)) + \cos(2nt \ln(p)) \right)}_{\geq 0} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Damit gilt die Ungleichung

$$\left((\sigma - 1) \zeta(\sigma) \right)^3 \cdot \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| = \frac{1}{\sigma - 1} \cdot \left(\zeta(\sigma)^3 \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \right) \geq \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Im Limes $\sigma \rightarrow 1$ geht die rechte Seite der Ungleichung gegen ∞ . Andererseits bleiben $(\sigma - 1)\zeta(\sigma)$ und $|\zeta(\sigma + 2it)|$ im Limes $\sigma \rightarrow 1$ beschränkt. Also muss

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right| = \infty$$

gelten; aber dann kann $s = 1 + it$ keine Nullstelle von ζ gewesen sein. \square

Satz 4.21 (Primzahlsatz). *Es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = 1.$$

Mit den Überlegungen im Abschnitt 4.3 folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{\text{Primzahlen } p \leq x\}}{x / \ln(x)} = 1.$$

Beweis. Wir untersuchen die Funktion

$$F(y) := \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-ny}$$

und ihr Verhalten im Limes $y \rightarrow 0$.

Mit dem Integral von Cahen–Mellin,

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} \Gamma(s) y^{-s} ds,$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-ny} = \frac{1}{2\pi i} \int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Gamma(s) (ny)^{-s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} \Gamma(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} y^{-s} ds.$$

Die Vertauschung von Reihe und Integral ist mit dem Satz von Fubini erlaubt, weil das Integral am Ende absolut konvergiert: $\zeta'(s)/\zeta(s)$ ist als Dirichlet-Reihe auf $s = 3/2 + i\mathbb{R}$ beschränkt, und

$$|\Gamma(3/2 + it)|^2 = |1/2 + it|^2 |\Gamma(1/2 + it)|^2 = |1/2 + it|^2 \cdot \frac{\pi}{\cosh(\pi t)}$$

ist im Limes $t \rightarrow \pm\infty$ exponentiell abklingend.

Im Integral dürfen wir $y = 0$ nicht einsetzen, da y in y^{-s} zu einer Potenz mit negativem Realteil vorkommt. Deswegen verschieben wir den Integrationsweg auf die Gerade $-1/2 + i\mathbb{R}$. Dazu brauchen wir folgende Eigenschaften:

(1) Auch auf der Geraden $-1/2 + i\mathbb{R}$ ist $\Gamma(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} y^{-s}$ absolut integrierbar für jedes $y > 0$. Dazu verwendet man die Funktionalgleichung

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log(2\pi) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\pi}{2} \tan(\pi s/2) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

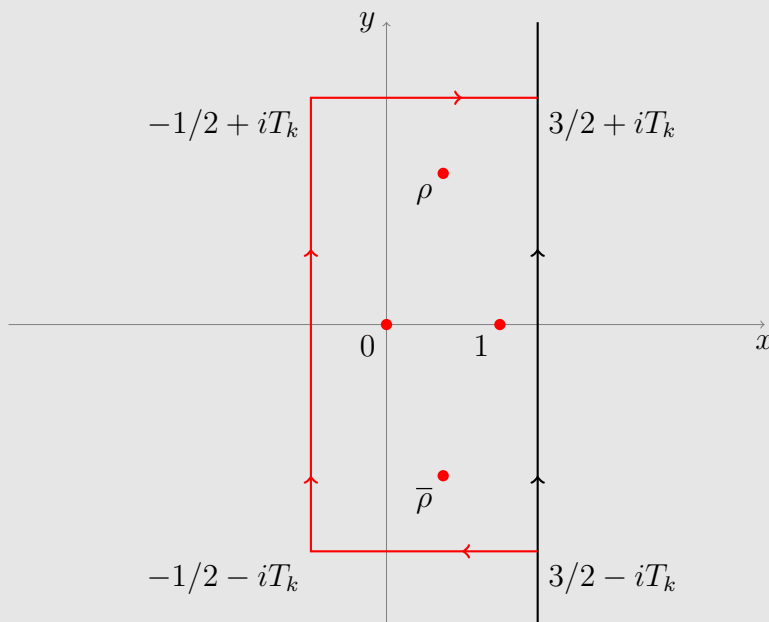
und das schnelle Abklingen von $\Gamma(s)$.

(2) Man findet eine Folge $T_k \rightarrow \infty$, sodass $\zeta'(s)/\zeta(s)$ auf den Geradestücken $\sigma \pm iT_k$, $-1/2 \leq \sigma \leq 3/2$ holomorph und langsam wächst:

$$\sup_{-1/2 \leq \sigma \leq 3/2} \left| \frac{\zeta'(\sigma + iT_k)}{\zeta(\sigma + iT_k)} \right| = O(T_k).$$

Dazu verwendet man die Darstellung

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log(\sqrt{\pi}) - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \psi(s/2) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\xi(\rho)=0 \\ -N \leq \text{Im}[\rho] \leq N}} \frac{1}{s-\rho}.$$



Figur 4.2: Verschiebung des Integrationswegs

Mit dem Residuensatz im Limes $k \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} \Gamma(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} y^{-s} ds \\
 &= \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \Gamma(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} y^{-s} ds + 2\pi i \sum_{\alpha=0,1,\rho} \operatorname{Res}_{s=\alpha} \left(\Gamma(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} y^{-s} \right) \\
 &= \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \Gamma(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} y^{-s} ds + 2\pi i \cdot \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - y^{-1} + \sum_{\rho} \Gamma(\rho) y^{-\rho} \right),
 \end{aligned}$$

wobei ρ die nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ durchläuft.

Im Limes $y \rightarrow 0$ ist das verbleibende Integral beschränkt. Wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-ny} \sim y^{-1} - \sum_{\zeta(\rho)=0} y^{-\rho} \Gamma(\rho), \quad y \rightarrow 0.$$

Da $\operatorname{Re}[\rho] = 1$ nicht vorkommt, ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-ny} \sim y^{-1}, \quad y \rightarrow 0.$$

Mit dem Taubersatz von Hardy–Littlewood folgt $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x$. □

5. Elliptische Funktionen

5.1. Ein Spielbeispiel

5.1.1. Der Arkussinus

Wir untersuchen das indefinite Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

aus Sicht der Funktionentheorie. Da der Integrand die einfache Stammfunktion $\arcsin(z)$ besitzt, wird das Folgende bestimmt übertrieben wirken. Die Methode wird sich aber auch auf die interessanteren *elliptischen Integrale* übertragen.

Der Nenner $\sqrt{1-z^2}$ definiert keine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} , sondern höchstens auf dem Intervallkomplement $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Um $\sqrt{1-z^2}$ wirklich dort zu konstruieren, genügt es, einen Zweig von $\sqrt{1-1/z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ zu finden. Dazu schreibt man

$$\sqrt{1-1/z^2} = \sqrt{1-1/z} \cdot \sqrt{1+1/z}$$

mit einem Zweig von $\sqrt{1-1/z}$ auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ und einem Zweig von $\sqrt{1+1/z}$ auf der anderen geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$.

Die Funktion $\sqrt{1-z^2}$ ist eindeutig bestimmt, wenn wir $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Im}[\sqrt{1-x^2}] = +\infty$ voraussetzen.

Das Problem von Verzweigungsschnitt verschwindet aber, wenn wir den Graphen

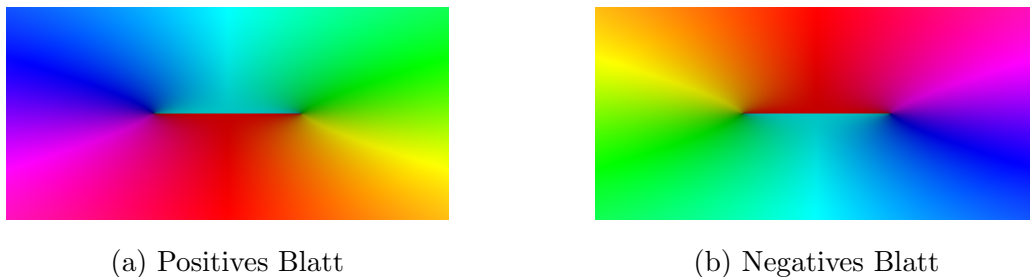
$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + w^2 = 1\}$$

definieren und die Funktion

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z, w) = w$$

anstelle von $\sqrt{1-z^2}$ betrachten. (X nennt man **Riemannsche Fläche** von $\sqrt{1-z^2}$.) Die Menge X enthält zwei Kopien von $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, und zwar die Teilmengen

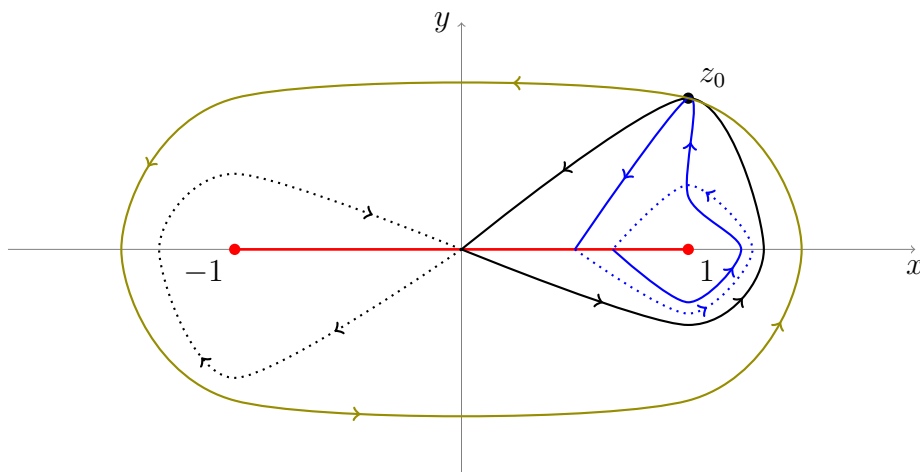
$$U_+ = \{(z, \sqrt{1-z^2}) : z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]\}, \\ U_- = \{(z, -\sqrt{1-z^2}) : z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]\}.$$



Figur 5.1: Visualisierung der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{w}$ auf X . Die Farbe beschreibt das komplexe Argument. Links wird die Funktion auf dem positiven Blatt U_+ dargestellt (bzw. der positive Zweig von $\sqrt{1-z^2}$ wird verwendet), rechts auf dem negativen Blatt U_- . Beim Durchgang durch den Verzweigungsschnitt wird zum anderen Blatt übergangen.

Diese zwei *Blätter* von X werden entlang des Verzweigungsschnitts “aneinander geklebt”.

Ein geschlossener Weg in X entspricht einem geschlossenen Weg in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, auf dem die Wurzel $\sqrt{1-z^2}$ im Anfangs- und Endpunkt denselben Zweig annimmt.



Figur 5.2: Drei geschlossene Wege in X (schwarz, blau, grün). Der Verzweigungsschnitt ist in Rot dargestellt. Die gestrichelten Teilwege verlaufen im negativen Blatt.

Sei nun $t_0 \in X$ ein beliebiger Anfangspunkt.

Das Integral

$$I(t) := \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_{t_0}^t \frac{dz}{w}$$

ist nicht wohldefiniert! Mit anderen Worten: es hängt von der Wahl von einem Weg γ in X von t_0 nach t ab.

Allerdings ist der Wert von $I(t)$ auch nicht völlig beliebig:

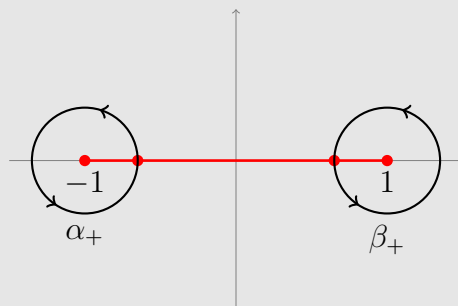
Lemma 5.1. Sei γ ein geschlossener Weg in X . Dann gilt

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{w} = \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

Mit anderen Worten: für jedes t ist $I(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$ in $\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z})$ wohldefiniert.

Beweis. Der Beweis wird etwas skizzenhaft.

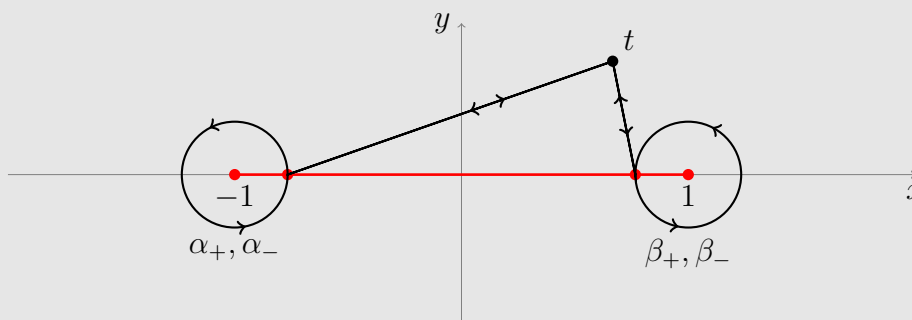
Sei t_0 der Anfangs- (und End-)punkt von γ und o.B.d.A. liege t_0 im positiven Blatt. Wir definieren kleine Kreise α_+, β_+ um $z = -1$ und $z = +1$ im positiven Blatt, die *nicht* den Verzweigungsschnitt durchqueren, sondern dort anfangen und enden (vgl. Abbildung), und im negativen Blatt analog die Kreise α_- um $z = -1$ und β_- um $z = +1$.



Figur 5.3: Kreise im positiven Blatt

Jeder geschlossene Weg von t_0 nach t_0 ist in X homotop zu einer Verkettung von den folgenden Wegen:

- (1) Beginne mit t_0 , fahre entlang dem Kreis α_+ oder β_+ , durch den Verzweigungsschnitt, und zurück zum entsprechenden Punkt \tilde{t}_0 im negativen Blatt.
- (2) Beginne mit \tilde{t}_0 , fahre entlang dem Kreis α_- oder β_- , durch den Verzweigungsschnitt, und zurück zu t_0 .



Figur 5.4: Geschlossene Wege in der Fläche $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + w^2 = 1\}$. Hier ist $t \in \{t_0, \tilde{t}_0\}$.

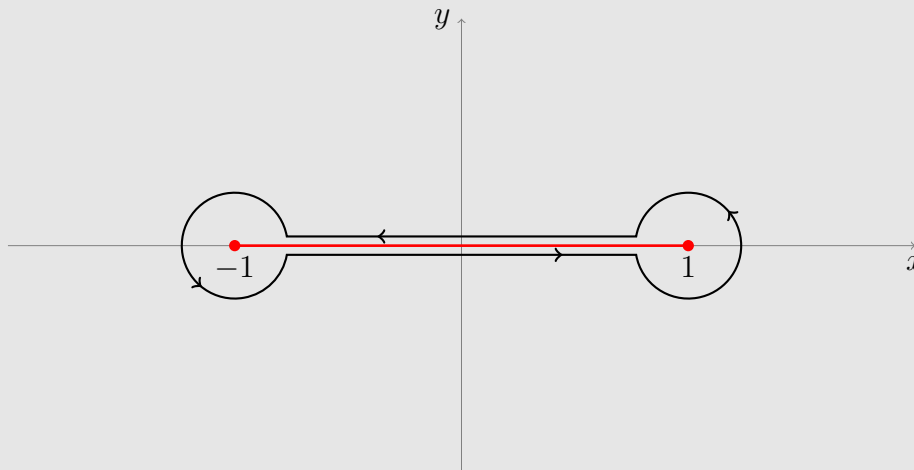
Für die Integrale von $\frac{dz}{w}$ gelten die Relationen

$$\int_{\alpha_-} \frac{dz}{w} = - \int_{\alpha_+} \frac{dz}{w}, \quad \int_{\beta_-} \frac{dz}{w} = - \int_{\beta_+} \frac{dz}{w},$$

da sich die Funktion $w = \pm\sqrt{1-z^2}$ dort nur um den Faktor ± 1 unterscheidet. Damit erhalten wir:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{w} = N \cdot \left(\int_{\alpha_1} \frac{dz}{w} + \int_{\beta_2} \frac{dz}{w} \right)$$

für ein $N \in \mathbb{Z}$.



Figur 5.5: $\int_{\alpha_+} + \int_{\beta_-}$

Das Integral $(\int_{\alpha_+} + \int_{\beta_-}) \frac{dz}{w}$ berechnen wir jetzt auf zwei Weisen:

(1) Wir lassen den Integrationsweg auf den Geradenabschnitt von 1 nach -1, gefolgt durch den Geradenabschnitt von -1 nach 1, zusammenfallen. Dabei nimmt $\sqrt{1-z^2}$ auf dem ersten Geradenabschnitt seine negative Wurzel an, und auf dem zweiten Abschnitt die positive Wurzel. Wir erhalten

$$\oint \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_1^{-1} \frac{1}{-\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

(2) Setze $z = 1/w$ und verwende Residuensatz. Der transformierte Integrationsweg ist eine einfache Schleife um $w = 0$:

$$\oint \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \oint \frac{dw}{w\sqrt{w^2-1}} = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{w\sqrt{w^2-1}}; w=0\right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{-1}} = \pm 2\pi. \quad \square$$

5.1.2. Periodische Funktionen

Die "Stammfunktion" $\int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$ ist also keine wohldefinierte holomorphe Funktion: man kann sie höchstens als Funktion

$$X \longrightarrow \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z})$$

auffassen.

Es ist naheliegend zu versuchen, die *inverse* Funktion zu bilden: das heißt, eine Funktion $f(w)$ durch

$$\int_{t_0}^{f(w)} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = w$$

zu definieren. Oder äquivalent: eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(w) = \sqrt{1-f(w)^2}, \quad f(0) = t_0, \quad t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}.$$

(N.B. Für $t_0 = \pm 1$ ist $\sqrt{1-w^2}$ in der Nähe von $w = t_0$ nicht stetig, und die üblichen Eindeutigkeitssätze greifen nicht.¹)

Aus der Mehrdeutigkeit von $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ modulo 2π wird dadurch die herkömmliche Funktionalgleichung

$$f(w + 2\pi) = f(w);$$

insbesondere ist jede Lösung f der Differentialgleichung

$$f'(w)^2 = 1 - f(w)^2$$

automatisch **periodisch** mit Periode 2π .

Die Zahl

$$2\pi = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

heißt entsprechend **Periode** der mehrwertigen Funktion $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, oder auch Periode der Kurve $w^2 + z^2 = 1$.

Wir versuchen nicht, die Wohldefiniertheit von $f(w)$ direkt zu begründen. Stattdessen werden wir

- (1) periodische holomorphe Funktionen allgemein untersuchen;
- (2) unter diesen Funktionen eine Lösung der Differentialgleichung finden.

Jede holomorphe periodische Funktion kann als holomorphe Funktion der Variablen e^{iz} geschrieben werden:

¹Wir erhalten in der Tat neben $f(w) = \pm \cos(w)$ die trivialen Lösungen $f(w) = \pm 1$.

Proposition 5.2. Sei $S = S_{\alpha,\beta} = \{x + iy \in \mathbb{C} : \alpha < y < \beta\}$ ein horizontaler Streifen in \mathbb{C} und $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und 2π -periodisch: $f(z + 2\pi) = f(z)$. Dann existiert genau eine im Kreisring

$$A = \{z \in \mathbb{C} : e^{-\beta} < |z| < e^{-\alpha}\}$$

holomorphe Funktion F mit

$$f(z) = F(e^{iz}), \quad z \in S.$$

Beweis. Für $z \in A$ mit $z \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ definieren wir

$$F(z) = f(-i \cdot \operatorname{Log}(z)).$$

Das ist wohldefiniert, denn für $z \in A$ liegt $-i \cdot \operatorname{Log}(z)$ im Streifen S . Nach Konstruktion gilt, für jedes $z \in S$,

$$F(e^{iz}) = f(-i \cdot \operatorname{Log}(e^{iz})) = f(-i \cdot (iz + 2\pi in)) = f(z + 2\pi n)$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$. Da f periodisch ist, folgt $f(z) = F(e^{iz})$.

Die Funktion F ist außerhalb von $\mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph. Sie ist in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ stetig, denn $\operatorname{Log}(z)$ kann in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ nur um $2\pi i$ springen und f ist periodisch mit Periode 2π . Die Holomorphie von F überall folgt als Spezialfall von dem folgenden Lemma. \square

Lemma 5.3. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Kreis und ℓ ein Gerade, der U nichttrivial schneidet. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und f auf $U \setminus \ell$ holomorph, dann ist f auf ganz U holomorph.

Beweis. $U \setminus \ell$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponente, genannt U_1 und U_2 . Nach der Cauchy'schen Integralformel gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_1} \frac{f(z)}{z-w} dz = \begin{cases} f(w) & w \in U_1; \\ 0 & w \in U_2; \end{cases}$$

sowie

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_2} \frac{f(z)}{z-w} dz = \begin{cases} 0 & w \in U_1; \\ f(w) & w \in U_2. \end{cases}$$

Also gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w), \quad w \in U_1 \cup U_2.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung in $w \in U$ stetig sind, gilt die Gleichung überall in U . Aber $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z-w} dz$ ist eine holomorphe Funktion von w . \square

Indem wir die Laurent-Entwicklung von F auf dem Kreisring $e^{-\beta} < |z| < e^{-\alpha}$ einsetzen, erhalten wir:

Satz 5.4. Sei $S = S_{\alpha,\beta} = \{x + iy \in \mathbb{C} : \alpha < y < \beta\}$ ein horizontaler Streifen in \mathbb{C} und $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und periodisch mit $f(z + 2\pi) = f(z)$. Dann ist f durch eine lokal gleichmäßig konvergierende **Fourier-Reihe** gegeben:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inz}.$$

Die **Fourier-Koeffizienten** sind durch das Integral

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_z^{z+2\pi} f(w) e^{-inw} dw$$

für beliebiges $z \in S$ gegeben.

Beweis. Schreibe $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$. Die Koeffizienten sind durch die Laurent-Formel bestimmt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=e^{-r}} F(z) z^{-n-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{-r+it}) e^{-n(-r+it)} dt, \quad z = e^{-r+it}, \quad \alpha < r < \beta.$$

Mit $F(e^{iz}) = f(z)$ ist das Integral also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + ir) e^{-in(t+ir)} dt = \int_{ir}^{ir+2\pi} f(w) e^{-inw} dw.$$

Das Integral $\int_z^{z+2\pi} f(w) e^{-inw} dw$ ist eine holomorphe Funktion von $z \in S$, die auf der imaginären Achsenschnitt $z = ir$, $\alpha < r < \beta$ konstant a_n ist. Nach dem Identitätssatz ist $\int_z^{z+2\pi} f(w) e^{-inw} dw = a_n$ für alle $z \in S$. \square

Kommen wir zurück zum eigentlichen Problem. Wir suchen Lösungen der Differentialgleichung

$$f'(w)^2 = 1 - f(w)^2.$$

Wenn wir in dieser Gleichung Ableitungen ziehen, dann erhalten wir

$$2f'(w)f''(w) = -2f(w)f'(w),$$

bzw. (falls f nicht-konstant ist)

$$f''(w) = -f(w).$$

Nach Einsetzen der Fourier-Reihe $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inz}$ und einem Koeffizientenvergleich erhalten wir $n^2 a_n = a_n$. Damit gilt $a_n = 0$ falls $n \neq \pm 1$, d.h. $f(z)$ hat die Form

$$f(z) = A e^{iz} + B e^{-iz}$$

mit zu bestimmenden Konstanten A, B . Da $f'(z) = iAe^{iz} - iBe^{-iz}$, folgt

$$f(z)^2 + f'(z)^2 = 4AB,$$

also $B = 1/(4A)$.

Zum Invertieren des Integrals $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ verlangen wir den Anfangswert $f(0) = 0$, also $A = \pm \frac{1}{2i}$, und erhalten

$$f(z) = \pm \left(\frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz} \right) = \pm \sin(z).$$

In der Tat gilt (mit einem geeigneten Zweig von $\sqrt{1-t^2}$)

$$\int_0^{\sin(z)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = z, \quad |z| \text{ hinreichend klein.}$$

5.2. Elliptische Integrale

Jetzt, da wir unser Spielbeispiel $\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$ besser verstehen, sind wir bereit, elliptische Integrale zu untersuchen.

Definition 5.5. Ein **elliptisches Integral** ist ein (definites oder indefinites) Integral der Form

$$\int R(z, \sqrt{p(z)}) dz,$$

wobei R eine rationale Funktion und $p(z)$ ein Polynom vom Grad 3 oder 4 ohne mehrfache Nullstellen bezeichnen.

Einige elementare Integrale sind in dieser Definition mitenthalten. Unter anderem soll die Wurzel in einem nichttrivialen elliptischen Integral tatsächlich vorkommen, d.h. die rationale Funktion $R(x, y)$ müsste zumindest ungerade Potenzen von y enthalten.²

Der Name kommt daher, dass elliptische Integrale bei der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse auftreten. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < b \leq a,$$

beschreibt eine Ellipse mit Hauptachse der Länge $2a$ und Nebenachse der Länge $2b$, und der Umfang dieser Kurve ist

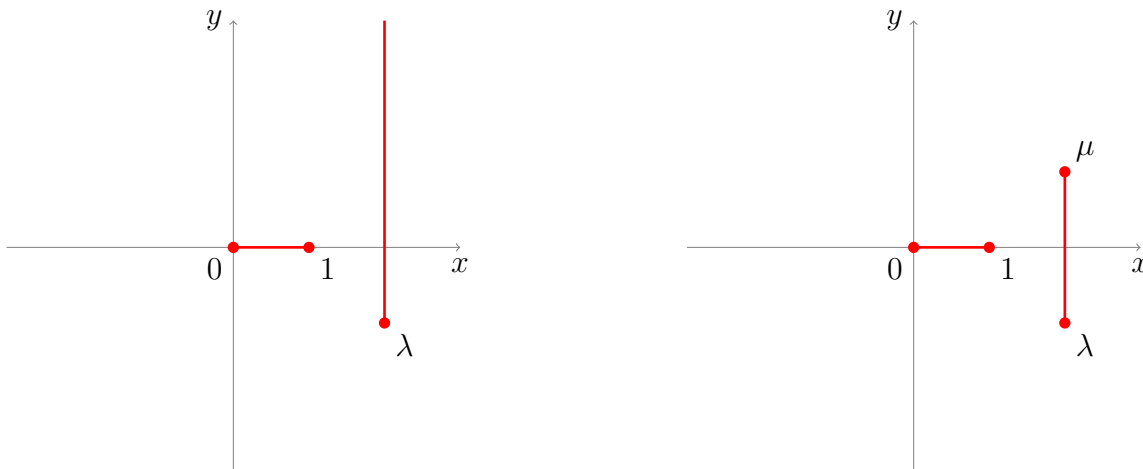
$$4a \cdot E(k), \quad k := \sqrt{1 - b^2/a^2},$$

wobei $E(k)$ das **vollständige Integral 2. Art** bezeichnet:

$$E(k) := \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx.$$

²Auch das ist nicht hinreichend. Z.B. besitzt $\frac{z^2 dz}{\sqrt{z^3-1}}$ die triviale Stammfunktion $\frac{2}{3}\sqrt{z^3-1}$.

Der Integrand in einem elliptischen Integral ist immer auf einer zweimal geschlitzten Ebene holomorph. Die Schlitzten kann man so wählen, dass zwei Paaren von Nullstellen von p (falls $\text{grad } p = 4$) oder ein Nullstellenpaar miteinander und die dritte Nullstelle mit ∞ (falls $\text{grad } p = 3$) verbunden werden, vgl. Figur.



Figur 5.6: Maximale Holomorphiebereiche für $\frac{1}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)(z-\mu)}}$. Die roten Strecken werden ausgenommen.

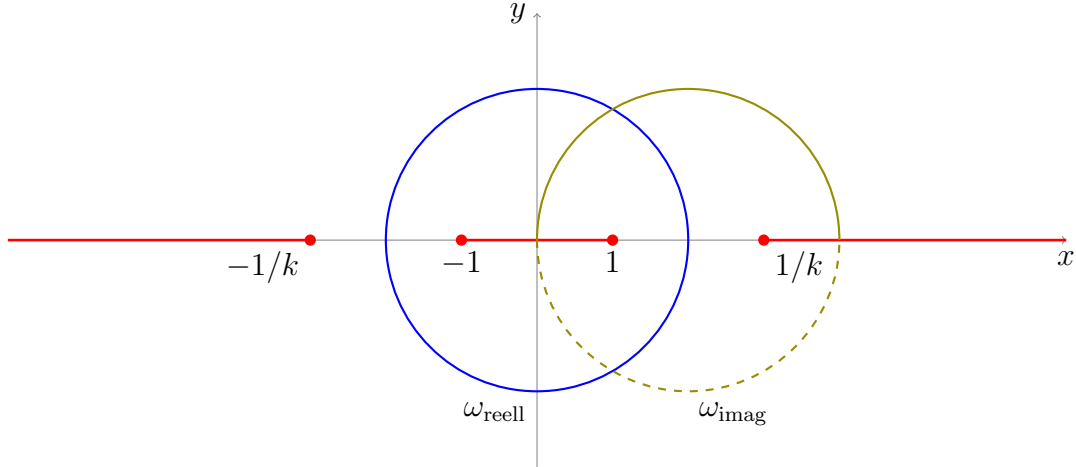
Im Folgenden betrachten wir speziell das **elliptische Integral 1. Art**:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad 0 < k < 1.$$

Der Integrand wird traditionell als holomorphe Funktion auf dem Gebiet

$$\{z \in \mathbb{C} : z \notin (-\infty, -1/k] \cup [1/k, \infty)\}$$

aufgefasst. Um die Werte des Integrals zu verstehen, müssen wir zuerst die möglichen Werte auf geschlossenen Kurven untersuchen.



Figur 5.7: Zwei Perioden des elliptischen Integrals 1. Art. Gestrichelte Wege verlaufen im negativen Blatt.

Offenbar kann man eine Schleife in D um das Intervall $[-1, 1]$ ziehen (blau). Das Integral ergibt sich zu

$$\omega_{\text{reell}} := \oint \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};$$

das ist die **reelle Periode**.

Ein anderes Integral erhält man, indem man eine Schleife betrachtet, die *durch beide Schnitten verläuft* (grün). Beim Übergang durch den Schnitt wechselt sich den Wurzelzweig von $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$. Indem wir hierfür den Integrationsweg auf die reelle Achse zusammenfallen lassen, erhalten wir den Wert

$$\omega_{\text{imag}} = \oint \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2 \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Integrand $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ im Intervall $[1, 1/k]$ rein-imaginär ist. (Ob der Imaginärteil positiv oder negativ ist, hängt davon ab, wie man vorher den Zweig im Wurzel gewählt hat!) Entsprechend heißt ω_{imag} die **imaginäre Periode**.

Mit Jacobis “imaginäre Transformation”

$$t = -\frac{1}{\sqrt{1-k'^2w^2}}, \quad dt = -\frac{k'^2w \, dw}{\sqrt{(1-k'^2w^2)^3}},$$

wobei k' durch

$$(k')^2 = 1 - k^2 \quad \text{und} \quad 0 < k' < 1$$

bestimmt ist, schreibt sich die imaginäre Periode wie folgt um:

$$\omega_{\text{imag}} = 2 \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2i \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2w^2)}}.$$

Also gilt:

$$\omega_{\text{reell}} = 4 \cdot K(k), \quad \omega_{\text{imag}} = 2i \cdot K(k').$$

Hier bezeichnet

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

das **vollständige elliptische Integral 1. Art**.

5.3. Elliptische Funktionen

Ähnlich wie für $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ versuchen wir, eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ zu invertieren: das heißt, eine holomorphe (oder zumindest meromorphe) Funktion $f = f(z; k)$ zu finden mit

$$\int_0^{f(z;k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = z.$$

Wegen der Mehrdeutigkeit von $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ muss eine solche Funktion $f(z; k)$ **zwei** wesentlich verschiedene Perioden besitzen:

$$f(z + \omega_{\text{reell}}; k) = f(z; k) \quad \text{und} \quad f(z + \omega_{\text{imag}}; k) = f(z; k).$$

Es stellt sich die Frage, ob Funktionen mit mehreren Perioden überhaupt existieren.

5.3.1. Perioden und Gitter

Definition 5.6. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion.
Die Gruppe der **Perioden** von f ist

$$\text{Per}(f) = \{w \in \mathbb{C} : f(z + w) \equiv f(z)\}.$$

Lemma 5.7. Für jede nicht-konstante meromorphe Funktion ist $\text{Per}(f)$ eine diskrete und abgeschlossene Untergruppe der additiven Gruppe \mathbb{C} .

Beweis. Falls $\omega_1, \omega_2 \in \text{Per}(f)$, dann gilt

$$f\left(z + (\omega_1 + \omega_2)\right) = f\left((z + \omega_1) + \omega_2\right) = f(z + \omega_1) = f(z),$$

also auch $\omega_1 + \omega_2 \in \text{Per}(f)$.

Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ kann man die meromorphe Funktion

$$F_z : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad w \mapsto f(z + w) - f(z)$$

definieren. Dann ist $\text{Per}(f) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} F_z^{-1}(\{0\})$ ein Durchschnitt von Nullstellenmengen meromorpher Funktionen, die alle diskret und abgeschlossen sind. Damit ist $\text{Per}(f)$ selbst diskret und abgeschlossen. \square

Die möglichen Periodengruppen einer meromorphen Funktion f sind durch das folgende Lemma stark eingeschränkt: mit seiner Hilfe sieht man schnell, dass viele Untergruppen von \mathbb{C} , die infrage kämen, nicht abgeschlossen sind.

Lemma 5.8 (Jacobi). *Seien $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt:*

$$\inf_{\substack{\ell, m, n \in \mathbb{Z} \\ (\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)}} |\ell a + m b + n c| = 0.$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann finden wir ein $\delta > 0$ mit

$$|\ell a + m b + n c| > \delta \quad \text{für alle } \ell, m, n \in \mathbb{Z}, (\ell, m, n) \neq (0, 0, 0).$$

Dann gilt aber auch

$$|(\ell - \ell')a + (m - m')b + (n - n')c| > \delta$$

für jede zwei verschiedene Tupeln (ℓ, m, n) und $(\ell', m', n') \in \mathbb{Z}^3$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die $(2N + 1)^3 - 1$ verschiedene Punkte

$$\{\ell a + m b + n c : -N \leq \ell, m, n \leq N, (\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)\},$$

die alle mindestens den Abstand δ voneinander haben und außerdem (wegen der Dreiecksungleichung) im Kreis

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3N \cdot \max\{|a|, |b|, |c|\} =: 3N\lambda \right\}$$

liegen. Wir haben also $(2N + 1)^3 - 1$ disjunkte Kreise vom Radius $\delta/2$, die in einem Kreis vom Radius $3N\lambda + \delta$ ohne Überlappen passen. Für hinreichend großes N erhält man durch Flächenvergleich einen Widerspruch. \square

Korollar 5.9. *Für eine diskrete, abgeschlossene Untergruppe $G < \mathbb{C}$ trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:*

(i) $G = \{0\}$;

(ii) $G = \mathbb{Z}\omega = \{\lambda\omega : \lambda \in \mathbb{Z}\}$ mit einem Element $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(iii) $G = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, also

$$G = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\},$$

mit $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, und in diesem Fall ist außerdem $\tau := \omega_2/\omega_1$ nicht reell.

Die Gruppen im Fall (iii) heißen **Gitter** und werden bei uns meistens mit L (engl. *lattice*) bezeichnet.

Beweis. Angenommen, $G \neq \{0\}$. Da G abgeschlossen ist, muss nach Jacobis Lemma in jeder Menge der Form

$$\{\ell a + mb + nc : \ell, m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad a, b, c \in G \setminus \{0\}$$

der Wert 0 wirklich angenommen werden; insbesondere müssen a, b, c über dem Körper \mathbb{Q} linear abhängig sein.

Damit ist G eine torsionsfreie abelsche Gruppe von Rang höchstens 2. Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt entweder $G \cong \mathbb{Z}$ (Fall (ii)) oder $G \cong \mathbb{Z}^2$ (Fall (iii)). Im Fall (iii) kann $\tau := \omega_2/\omega_1$ nicht reell sein, denn: wäre $\tau \in \mathbb{R}$, dann definieren wir

$$a := \omega_1, \quad b := \omega_2, \quad c := i\omega_1.$$

Mit Jacobis Lemma folgt:

$$\inf_{\substack{\ell, m, n \in \mathbb{Z} \\ (\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)}} \left| \ell a + mb + nc \right|^2 = |\omega_1|^2 \cdot \inf_{(\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)} \left(|\ell + m\tau|^2 + n^2 \right) = 0,$$

und damit $\inf_{(\ell, m) \neq (0, 0)} |\ell + m\tau|^2 = 0$ und $0 \in \overline{G \setminus \{0\}}$, d.h. G ist nicht abgeschlossen. \square

Umgekehrt ist jede Untergruppe der Form (i)-(iii) tatsächlich diskret und abgeschlossen.

Da Gitter genau die möglichen Periodengruppen meromorpher Funktionen sind, die zwei unabhängige Perioden enthalten, ist folgende Definition naheliegend:

Definition 5.10. Sei $L < \mathbb{C}$ ein Gitter. Eine nichtkonstante **elliptische Funktion** mit Periodengitter L ist eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$\text{Per}(f) = L.$$

Ein Gitter L ist also ein freier \mathbb{Z} -Untermodul von \mathbb{C} vom Rang 2, und für $\omega_1, \omega_2 \in L$ gilt

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \Leftrightarrow \omega_1, \omega_2 \text{ ist eine Basis von } L.$$

Zwei andere Elemente

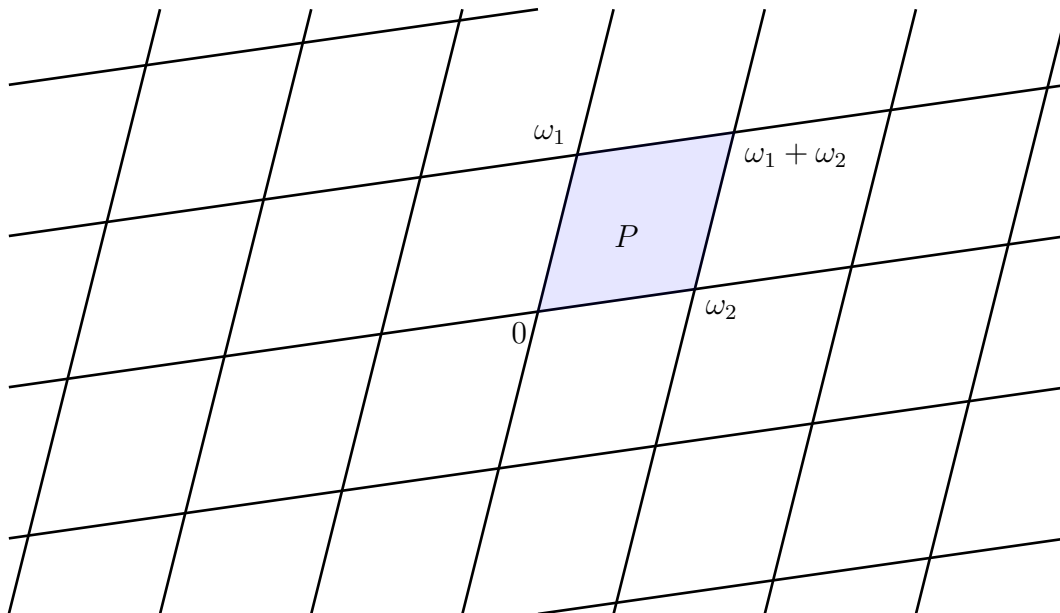
$$\omega'_1 := a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 := c\omega_1 + d\omega_2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

bilden genau dann eine Basis von L , wenn die Basiswechselmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ gehört, d.h. wenn $ad - bc = \pm 1$.

Definition 5.11. Sei $L < \mathbb{C}$ ein Gitter mit Basis ω_1, ω_2 . Die **Grundmasche** von L bzgl. der Basis ω_1, ω_2 ist

$$P = \{a\omega_1 + b\omega_2 : 0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1\}.$$

P ist das Parallelogramm mit Eckpunkten $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$.



Figur 5.8: Grundmasche eines Gitters.

Jede Grundmasche P eines Gitters L ist ein *Fundamentbereich* für die Operation von L auf \mathbb{C} durch Translationen. Das heißt:

Lemma 5.12. Sei P Grundmasche des Gitters L . Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existiert ein eindeutiges Gitterelement $\omega \in L$ mit

$$z - \omega \in P.$$

Beweis. Seien $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ die Eckpunkte von P . Da ω_2/ω_1 nicht reell ist, ist $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine \mathbb{R} -basis von \mathbb{C} . Schreiben wir

$$z = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

dann müssen wir

$$\omega := [\lambda_1] \cdot \omega_1 + [\lambda_2] \cdot \omega_2$$

setzen. □

5.3.2. Die Liouville'schen Sätze

Sei $L < \mathbb{C}$ ein Gitter.

Es stellt sich heraus, dass nicht-konstante elliptische Funktionen mit Periodengitter L immer existieren. Mit einer geschickten Anwendung des Residuensatzes kann

man allerdings starke Einschränkungen für elliptischen Funktionen herleiten. Es gelten nämlich die vier *Sätze von Liouville*.

Satz 5.13 (1. Satz von Liouville). *Jede holomorphe elliptische Funktion f ist konstant.*

Beweis. Sei P eine Grundmasche von L . Als stetige Funktion ist f auf dem Kompaktum \bar{P} beschränkt:

$$|f(z)| \leq C \text{ für } z \in P.$$

Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ finden wir ein Gitterelement $\omega \in L$ mit $z - \omega \in P$. Da ω eine Periode von f ist, gilt auch

$$|f(z)| = |f(z - \omega)| \leq C.$$

Damit ist f eine beschränkte ganze Funktion, also konstant. \square

Satz 5.14 (2. Satz von Liouville). *Sei f eine elliptische Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{[w] \in \mathbb{C}/L} \text{Res}_w(f) = 0.$$

Für $[w] \in \mathbb{C}/L$ wählen wir beliebige Vertreter $w \in \mathbb{C}$. Das Residuum hängt nicht von w ab, denn aus

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \omega \in L$$

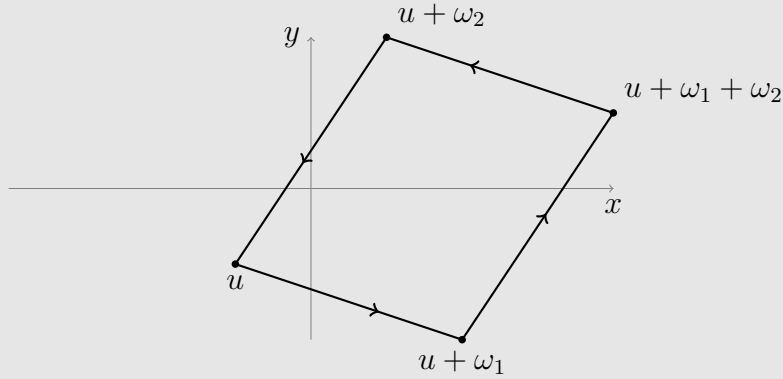
folgt

$$\text{ord}_{w+\omega}(f) = \text{ord}_w(f) \quad \text{sowie} \quad \text{Res}_{w+\omega}(f) = \text{Res}_w(f).$$

In der Tat sind alle Koeffizienten in den Laurent-Reihen von f um w und $w + \omega$ gleich:

$$\sum_{n \gg -\infty} a_n z^n = f(w + z) = f(w + \omega + z) = \sum_{n \gg -\infty} a_n z^n, \quad |z| \text{ hinreichend klein.}$$

Beweis. Sei ω_1, ω_2 eine Basis von L mit Grundmasche P , und wähle $u \in \mathbb{C}$ so, dass der Rand von $u + P$ keine Polstellen von f enthält. Mit P enthält auch $u + P$ genau einen Vertreter aus jeder Nebenklasse von \mathbb{C}/L .



Figur 5.9: Integrationsweg

Wir verwenden den Residuensatz und erhalten

$$\begin{aligned}
 \pm 2\pi i \cdot \sum_{[w] \in \mathbb{C}/L} \operatorname{Res}_w(f) &= \oint_{u+\partial P} f(z) dz \\
 &= \int_u^{u+\omega_1} f(z) dz + \int_{u+\omega_1}^{u+\omega_1+\omega_2} f(z) dz + \int_{u+\omega_1+\omega_2}^{u+\omega_2} f(z) dz + \int_{u+\omega_2}^u f(z) dz \\
 &= \int_u^{u+\omega_1} f(z) - f(z + \omega_2) dz - \int_u^{u+\omega_2} f(z) - f(z + \omega_1) dz,
 \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Gitterbasis $\{\omega_1, \omega_2\}$ abhängt. Die Integranden in den letzten Integralen sind konstant 0, da f elliptisch ist. \square

Beispiel 5.15. Wir betrachten wieder das Beispiel von Abschnitt 5.2. Es wird sich herausstellen, dass das Inversionsproblem

$$\int_0^{f(z)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = z$$

durch eine elliptische Funktion $f(z) = \operatorname{sn}(z; k)$ zum Periodengitter

$$L = \mathbb{Z}\omega_{\text{reell}} \oplus \mathbb{Z}\omega_{\text{imag}} = \mathbb{Z} \cdot 4K(k) \oplus \mathbb{Z} \cdot 2iK(k')$$

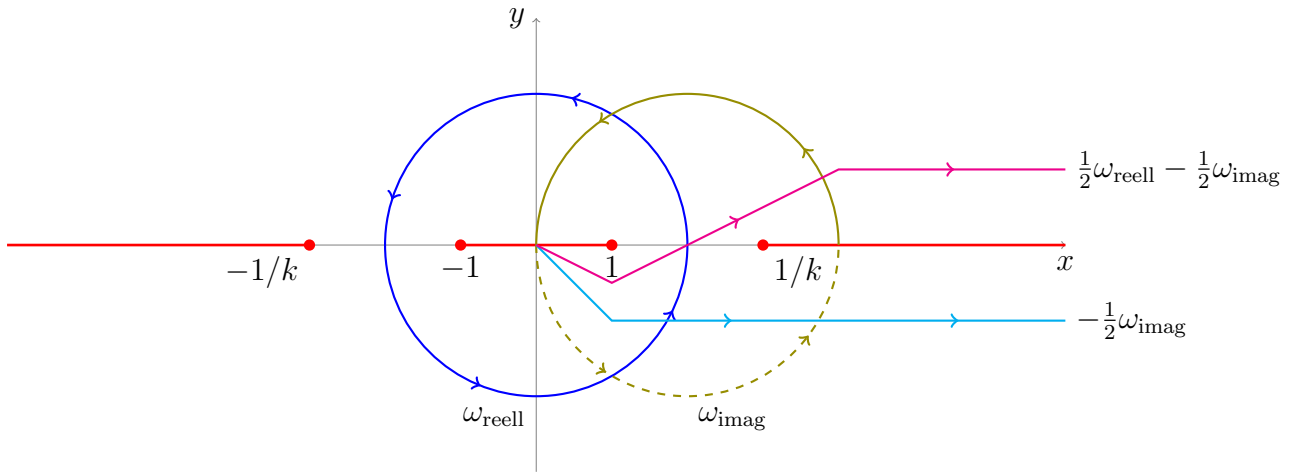
in der Tat lösbar ist. (Die Funktion $\operatorname{sn}(z; k)$ heißt *sinus amplitudinis*.) Wie jede nichtkonstante elliptische Funktion muss $\operatorname{sn}(z; k)$ Pole besitzen: die Polstellen von $\operatorname{sn}(z; k)$ sind genau die möglichen Werte von $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, integriert über einem Weg von 0 nach ∞ . Zwei solche Werte

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\omega_{\text{reell}} - \omega_{\text{imag}}}{2} = 2K(k) - iK(k')$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -\frac{\omega_{\text{imag}}}{2} = -iK(k')$$

sind in der Figur abgebildet:

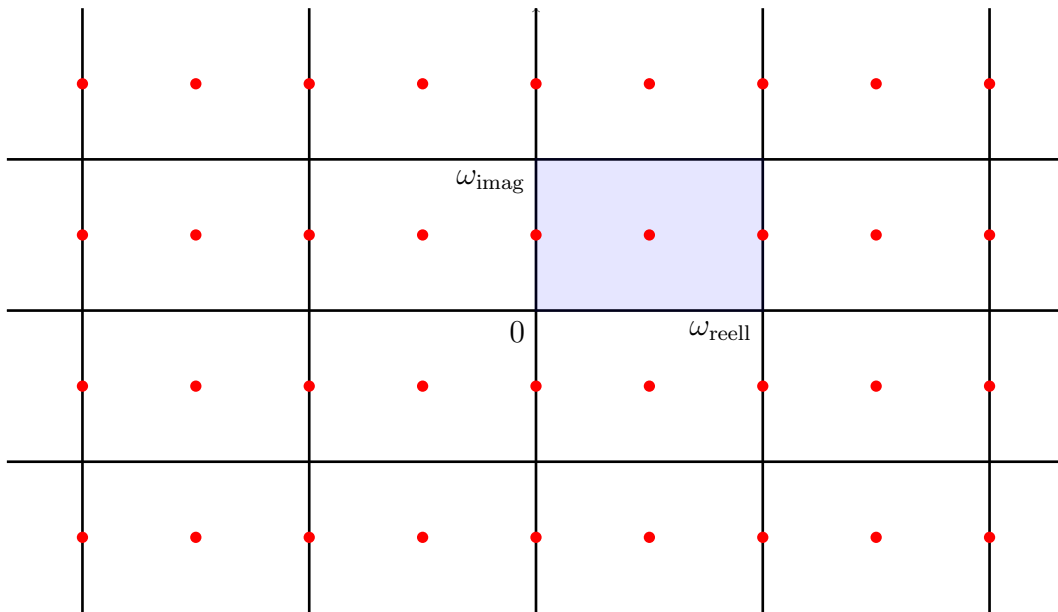


Figur 5.10: Zwei Werte für $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$

Die Funktion $\text{sn}(z; k)$ besitzt zwei einfache Pole modulo dem Periodengitter L : nämlich in den Punkten

$$\frac{1}{2}\omega_{\text{imag}} + L \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\omega_{\text{imag}} + \frac{1}{2}\omega_{\text{reell}} + L.$$

Nach dem 2. Satz von Liouville sind die Residuen in diesen Polen jeweils das Negative voneinander.



Figur 5.11: Polstellen des sinus amplitudinis $\text{sn}(z; k)$.

Der dritte Satz von Liouville ist eigentlich nur ein Korollar von dem zweiten Satz:

Satz 5.16 (3. Satz von Liouville). *Sei f eine elliptische Funktion. Für jedes $a \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\sum_{[w] \in \mathbb{C}/L} \text{ord}_w(f - a) = 0.$$

Mit anderen Worten, (solange man mit Vielfachheiten zählt), die Anzahl der Pole von f modulo L ist gleich der Anzahl der a -Stellen von f für jedes $a \in \mathbb{C}$. (Insbesondere nimmt eine nicht-konstante elliptische Funktion jedes Wert in $\hat{\mathbb{C}}$ an.) Diese Anzahl nennt man die **Ordnung** von $f \in K(L)$.

Beweis. Definiere

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z) - a} \in K(L).$$

Dann ist $\text{Res}_w(g) = \text{ord}_w(f - a)$. Die Behauptung folgt aus dem 2. Satz von Liouville. \square

Satz 5.17 (4. Satz von Liouville). *Sei f eine elliptische Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{[w] \in \mathbb{C}/L} \text{ord}_w(f) \cdot [w] = 0 \in \mathbb{C}/L.$$

Mit anderen Worten: wenn a_1, \dots, a_N und b_1, \dots, b_N jeweils Vertretersysteme der Null- bzw. Polstellen von f modulo L (mit Vielfachheit) durchlaufen, dann gilt

$$a_1 + \dots + a_N \equiv b_1 + \dots + b_N \pmod{L}.$$

Nach dem 3. Satz von Liouville steht auf linker und rechter Seite die gleiche Anzahl N .

Beweis. Wir gehen wie im Beweis vom 2. Satz von Liouville vor, integrieren aber die Funktion $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ anstelle von $f(z)$ über dem Rand des Periodenparallelogramms $u + \partial P$. Sei dazu u so gewählt, dass $u + \partial P$ weder Null- noch Polstellen von f enthält. Dann ist

$$\begin{aligned} & \pm 2\pi i \cdot \sum_{w \in u+P} \text{ord}_w(f) \cdot w \\ &= \oint z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \int_u^{u+\omega_1} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z + \omega_2) \frac{f'(z + \omega_2)}{f(z + \omega_2)} \right) dz - \int_u^{u+\omega_2} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z + \omega_1) \frac{f'(z + \omega_1)}{z + \omega_2} \right) dz \\ &= \omega_1 \int_u^{u+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_2 \int_u^{u+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

Nach der Integralformel von Cauchy ist $\frac{1}{2\pi i} \int_u^{u+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz =: n_1$ eine ganze Zahl (und zwar die Umlaufzahl der geschlossenen Kurve

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto f(u + t\omega_1)$$

um den Punkt 0). Analog ist $\frac{1}{2\pi i} \int_u^{u+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz =: n_2 \in \mathbb{Z}$. Also gilt

$$\sum_{w \in u+P} \text{ord}_w(f) \cdot w = \pm(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \in L. \quad \square$$

5.4. Die Weierstraß'sche elliptische Funktion

5.4.1. Konstruktion einer elliptischen Funktion

Nach den 1. und 2. Sätzen von Liouville kann es weder eine holomorphe elliptische Funktion, noch eine elliptische Funktion mit lediglich einem einfachen Pol in \mathbb{C}/L geben. Die einfachste Funktion, die alle Einschränkungen der Sätze von Liouville erfüllen würde, wäre eine elliptische Funktion der Ordnung 2 mit doppelten Nullstellen genau in den Gitterpunkten, alle mit Residuum 0.

Solche Funktionen wurden von Weierstraß konstruiert. Die Idee besteht darin, elliptische Funktionen als Gitterpunktsummen der Form $\sum_{\omega \in L} f(z-\omega)$ zu konstruieren. Wir brauchen dazu ein Lemma:

Lemma 5.18.

$$\sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^\lambda}$$

konvergiert genau dann, wenn $\lambda > 2$.

Beweis. Sei ω_1, ω_2 eine Basis von L . Auf \mathbb{R}^2 definieren wir eine Norm vermöge

$$\|(x, y)\| := |x\omega_1 + y\omega_2|.$$

Wegen Normäquivalenz in endlich-dimensionalen Vektorräumen ist $\|\cdot\|$ zur ℓ^∞ -Norm $\|(x, y)\| := \max\{|x|, |y|\}$ äquivalent; es gibt also Konstanten $c, C > 0$ mit

$$c \cdot \max\{|x|, |y|\} \leq |x\omega_1 + y\omega_2| \leq C \cdot \max\{|x|, |y|\} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere konvergiert $\sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^\lambda}$ genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{\max(|m|, |n|)^\lambda}$$

konvergiert. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es genau $8N$ Paare $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\max(|m|, |n|) = N$. Damit haben wir die Umordnung

$$\sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{\max(|m|, |n|)^\lambda} = \sum_{N=1}^{\infty} 8N^{1-\lambda} = 8 \cdot \zeta(\lambda - 1),$$

mit Konvergenz genau dann, wenn $\lambda > 2$. □

Definition 5.19. Die Weierstraß'sche \wp -Funktion mit Periodengitter L ist die meromorphe Funktion

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Hier ist $\frac{1}{\omega^2}$ der führende Taylor-Koeffizient von $\frac{1}{(z - \omega)^2}$ um $z = 0$: die Reihe ist nach der Vorschrift vom Satz von Mittag-Leffler konstruiert. Zur (absoluten, lokal gleichmäßigen) Konvergenz schreibt man

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{z(2 - z/\omega)}{(1 - z/\omega)^2}.$$

Die Reihe kann man ohne viel Mühe durch $\sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^3}$ majorisieren.

Proposition 5.20. Die Weierstraß'sche \wp -Funktion ist eine gerade elliptische Funktion der Ordnung 2 mit doppelten Polen genau in den Gitterpunkten $\omega \in L$.

Beweis. Nach dem Satz von Mittag-Leffler kann man die Polen von $\wp(z)$ sofort von der definierenden Reihe ablesen. $\wp(z)$ ist gerade, denn die Substitution $\omega \mapsto -\omega$ liefert

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z).$$

Wir müssen zeigen, dass \wp elliptisch ist.

Sei $\lambda \in L \setminus \{0\}$, ohne Einschränkung mit $\frac{1}{2}\lambda \notin L$. Durch die Substitution $\omega \mapsto \omega + \lambda$ ordnen wir die Reihe $\wp(z + \lambda)$ um, und erhalten

$$\wp(z + \lambda) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(z + \lambda)^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0, -\lambda}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(\omega + \lambda)^2} \right).$$

sowie

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0, -\lambda}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Damit hängt die Differenz

$$\wp(z+\lambda) - \wp(z) = \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0, -\lambda}} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega+\lambda)^2} \right)$$

nicht von z ab. In $z = \pm\lambda/2$ ist \wp holomorph, und

$$\wp(-\lambda/2 + \lambda) - \wp(-\lambda/2) = \wp(\lambda/2) - \wp(-\lambda/2) = 0,$$

da \wp gerade ist. Also ist $\wp(z+\lambda) = \wp(z)$ für alle z . □

Als gerade Funktion besitzt $\wp(z)$ eine Laurentreihenentwicklung um $z = 0$ von der Form

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

Da die Reihe $\sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$ verschwindet, ist der konstante Term in der Laurententwicklung 0:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

Korollar 5.21. *Die Funktion*

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

ist eine ungerade elliptische Funktion der Ordnung 3 mit dreifachen Polen genau in den Gitterpunkten $\omega \in L$, und einfachen Nullstellen genau in den Halbgitterpunkten

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \lambda \notin L, 2\lambda \in L.$$

Beweis. Mit \wp ist \wp' auch elliptisch, mit Polen der Ordnung 3 genau in den Gitterpunkten. Da \wp gerade ist, ist \wp' ungerade.

Seien ω_1, ω_2 eine Basis von L . Dann ist \wp' in den Punkten

$$\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2 := (\omega_1 + \omega_2)/2$$

holomorph, und aus

$$\wp'(\omega_i/2) = -\wp'(-\omega_i/2) = -\wp'(-\omega_i/2 + \omega_i) = -\wp'(\omega_i/2)$$

folgt $\wp'(\omega_i/2) = 0$. Nach dem 3. Satz von Liouville kann es keine weiteren Nullstellen geben. □

Die höheren Ableitungen sind ähnlich einfache Reihen:

$$\wp^{(k)}(z) = (-1)^k (k+1)! \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^{k+2}}.$$

$\wp^{(k)}(z)$ ist eine elliptische Funktion der Ordnung $k+2$, deren Polen genau in den Gitterpunkten $\omega \in L$ liegen, mit Laurententwicklung

$$\wp^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k (k+1)!}{z^{k+2}} + (k+1)! \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \omega^{-(k+2)} + \dots$$

Das führt zu der vollständigen Laurent-Entwicklung von $\wp(z)$:

Proposition 5.22. *In einer punktierten Umgebung von $z = 0$ gilt*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)G_{2k+2}z^{2k} = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots$$

Dabei sind G_k ($k \geq 4$ gerade) die **Eisensteinreihen**

$$G_k = G_k(L) = \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^k}.$$

Beweis. In der Laurent-Entwicklung einer geraden Funktion kommen nur gerade Exponenten vor. Der Koeffizient von z^{2k} in $\wp(z)$ ist $\frac{1}{(2k)!}$ mal konstanter Term von

$$\frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) = \wp^{(2k)}(z) - \frac{(2k+1)!}{z^{2k+2}}. \quad \square$$

5.4.2. Die Weierstraß-Gleichung

Sei L wie immer ein Periodengitter und \wp die zugehörige Weierstraß'sche elliptische Funktion. Für eine feste Gitterbasis ω_1, ω_2 von L definieren wir die **Halbperiodenwerte**

$$e_1 := \wp(\omega_1/2), \quad e_2 := \wp(\omega_2/2), \quad e_3 := \wp((\omega_1 + \omega_2)/2).$$

Lemma 5.23. *Die Werte e_1, e_2, e_3 sind paarweise verschieden, und die Punkte $\omega_i/2$ sind doppelte Nullstellen der elliptischen Funktionen $\wp(z) - e_i$. Für jeden Wert $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq e_1, e_2, e_3$ besitzt $\wp(z) - \lambda$ genau zwei einfache Nullstellen modulo L .*

Beweis. $\omega_i/2$ ist Nullstelle von $\wp(z) - e_i$ nach Definition. Nach dem 3. Satz von Liouville besitzt $\wp(z) - e_i$ zwei Nullstellen in der Grundmasche P , und nach dem 4. Satz von Liouville ist die Summe der Nullstellen ein Gitterelement. Damit muss $\wp(z) - e_i$ eine doppelte Nullstelle in $\omega_i/2$ und keine anderen Nullstellen in P haben. Insbesondere sind e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden (wenn $e_i = e_j$, dann wäre auch $\omega_j/2$ Nullstelle von $\wp(z) - e_i$).

Umgekehrt: hat $\wp(z) - \lambda$ eine doppelte Nullstelle $w \in P$, dann folgt aus dem 4. Satz von Liouville $2w \in L$, also $w \in \{\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2\}$ und $\lambda \in \{e_1, e_2, e_3\}$. \square

Satz 5.24 (Weierstraß-Gleichung). $\wp(z)$ erfüllt die Weierstraß'sche Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 &= 4 \cdot (\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ &= 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,\end{aligned}$$

mit $g_2 := 60G_4$ und $g_3 := 140G_6$.

Erinnerung: für $k \geq 4$ gerade ist $G_k = \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \omega^{-k}$ die Eisensteinreihe.

Beweis. (i) Die elliptische Funktion

$$f(z) := 4 \cdot (\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

hat nur Pole 6. Ordnung in den Gitterpunkten und doppelten Nullstellen in den Halbgitterpunkten $\omega_i/2$, $i = 1, 2, 3$. Damit ist

$$\frac{f}{\wp'(z)^2}$$

eine ganze elliptische Funktion, also (nach dem 1. Satz von Liouville) konstant.

Um $z = 0$ haben $\wp(z)$ und $\wp'(z)$ die Hauptteile

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + O(1), \quad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + O(1),$$

sodass die Laurententwicklung von $\frac{f}{\wp'(z)^2}$ um 0

$$\frac{f(z)}{\wp'(z)^2} = \frac{4/z^6 + \dots}{4/z^6 + \dots} = 1 + O(z)$$

beginnt. Die Konstante $\frac{f}{\wp'(z)^2}$ muss also 1 sein.

(ii) Nach (i) genügt $\wp(z)$ auf jeden Fall einer Differentialgleichung der Form $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 + A\wp(z)^2 + B\wp(z) + C$ mit geeigneten Ausdrücken A, B, C in e_1, e_2, e_3 . Setzen wir die Laurententwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + O(z^6)$$

ein, so ist

$$\begin{aligned} & \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 \\ &= \left(\frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + O(z^2) \right) - \left(\frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + O(z^2) \right) \\ &= -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + O(z^2). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit $A\wp(z)^2 + B\wp(z) + C$ liefert $A = 0$, $B = -60G_4$ und $C = -140G_6$. \square

Wir können damit die ersten elliptischen Integrale (zumindest theoretisch) berechnen:

Korollar 5.25. *Sei p ein kubisches Polynom der Form*

$$p(X) = 4X^3 - g_2X - g_3.$$

Sei L das Gitter der Perioden von $\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$:

$$L = \left\{ \oint_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} : \gamma \text{ geschlossene Kurve} \right\}$$

und $\wp(z; L) = \wp(z)$ die zugehörige Weierstraß'sche \wp -Funktion. Dann gilt im Kreis $|z| < \min_{\omega \in L \setminus \{0\}} |\omega|/2$:

$$\int_{\infty}^{\wp(z; L)} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} dx = \pm z.$$

(Das Vorzeichen \pm hängt vom Zweig $\sqrt{p(x)}$ ab.)

Beweis. Die Substitution $x = \wp(z)$ transformiert

$$dz = \frac{\wp'(z) dz}{\wp'(z)} = \frac{\wp'(z) dz}{\sqrt{p(\wp(z))}}$$

in $\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ und $z = 0$ in $x = \infty$. \square

5.5. Die j -Invariante

Mit dem Korollar 5.25 können wir elliptische Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$$

für komplexe Zahlen e_1, e_2, e_3 mit $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ invertieren. Das wollen wir jetzt auf beliebige Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}}$$

oder noch allgemeiner

$$\int R(x, y) dx, \quad y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4), \quad R \in \mathbb{C}(x, y)$$

übertragen. Die Idee besteht darin, eine geeignete Substitution der Form

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

im obigen Integral zu verwenden. Hier ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ und die zugehörige **Möbius-Transformation** bezeichnen wir mit

$$\varphi_M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{oder } M \cdot z.$$

5.5.1. Das Doppelverhältnis

Lemma 5.26. *Zu drei paarweise verschiedenen Punkten $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es eine eindeutige Möbius-Transformation φ mit*

$$\varphi(w_1) = \infty, \quad \varphi(w_2) = 0, \quad \varphi(w_3) = 1.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den allgemeinen Fall $w_1, w_2, w_3 \neq \infty$. Eine Möbius-Transformation $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ erfüllt $\varphi(w_1) = \infty$ und $\varphi(w_2) = 0$ genau dann, wenn sie von der Form $\varphi(z) = \lambda \cdot \frac{z-w_2}{z-w_1}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Durch $\varphi(w_3) = 1$ ist die Funktion eindeutig bestimmt:

$$\varphi(z) = \frac{(w_1 - w_3) \cdot (w_2 - z)}{(w_2 - w_3) \cdot (w_1 - z)}.$$

Die Formel bleibt auch richtig, wenn eine der Zahlen w_i gleich ∞ ist; in diesem Fall ist die Formel so zu verstehen, dass sich die Faktoren im Zähler und im Nenner, in denen w_i vorkommt, gegenseitig aufheben. \square

Dadurch wird folgende Definition motiviert:

Definition 5.27. Für eine Tupel (z_1, z_2, z_3, z_4) vier paarweise verschiedener Punkten in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist das **Doppelverhältnis**

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Mit anderen Worten: wenn die Möbius-Transformation φ die Punkte z_1, z_2, z_3 jeweils auf $\infty, 0$ bzw. 1 abbildet, dann ist das Doppelverhältnis $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ genau das Bild $\varphi(z_4)$. Aus dieser Sicht sieht man ohne viel Mühe, dass das Doppelverhältnis selbst unter Möbius-Transformationen invariant bleibt:

Lemma 5.28. *Seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier paarweise verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$ und sei φ eine Möbius-Transformation. Dann gilt*

$$[\varphi(z_1), \varphi(z_2); \varphi(z_3), \varphi(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Beweis. Sei ψ die Möbius-Transformation, die (z_1, z_2, z_3) auf $(\infty, 0, 1)$ abbildet. Dann ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ die Möbius-Transformation, die $(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3))$ auf $(\infty, 0, 1)$ abbildet. Wir erhalten

$$[\varphi(z_1), \varphi(z_2); \varphi(z_3), \varphi(z_4)] = \psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(z_4)) = \psi(z_4) = [z_1, z_2; z_3, z_4]. \quad \square$$

Korollar 5.29. *Sei $\lambda = [z_1, z_2; z_3, z_4]$ ein Doppelverhältnis. Die Umordnungen der Tupel (z_1, z_2, z_3, z_4) haben die Doppelverhältnisse*

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Unter den Umordnung kommt übrigens jeder Term in der obigen Liste genau 4-mal vor. Der Stabilisator, d.h. die Untergruppe von S_4 , die das Doppelverhältnis λ respektiert, wird *Klein'sche Vierergruppe* V_4 genannt.

Abstrakt gesehen ist V_4 die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Unter Verkettung (als Funktionen von λ) bilden die sechs Funktionen

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

insbesondere eine Gruppe G : die sogenannte **anharmonische Gruppe**

$$G \cong S_4/V_4 \cong S_3.$$

Beweis. Nach dem Lemma dürfen wir o.B.d.A. annehmen,

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = \lambda$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Die Doppelverhältnisse der Umordnungen von $(\infty, 0, 1, \lambda)$ rechnet man einfach aus. □

5.5.2. Die j -Invariante

Definition 5.30. Sei $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ eine Menge vier paarweise verschiedener Zahlen in $\hat{\mathbb{C}}$ und sei $\lambda = [z_1, z_2; z_3, z_4]$. Die j -**Invariante** der Menge ist

$$\begin{aligned} j &= 2^7 \cdot \left(3 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + (1 - \lambda)^2 + \frac{1}{(1 - \lambda)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda - 1)^2} + \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} \right) \\ &= 2^8 \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}. \end{aligned}$$

Die Zweierpotenz in der Definition von j erklären wir im nächsten Kapitel. Die j -Invariante ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Reihenfolge, da bei einer Umordnung von z_1, z_2, z_3, z_4 die Terme $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ nur permutiert werden.

Lemma 5.31. Seien $A = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ und $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zwei Mengen vier paarweise verschiedener Zahlen in $\hat{\mathbb{C}}$. Dann sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine Möbius-Transformation φ , die A auf B abbildet;
- (ii) A und B haben die gleiche j -Invariante.

Beweis. Im Beweis brauchen wir etwas Algebra.

Nach einem obigen Lemma existiert eine Möbius-Transformation, die z_i auf w_i abbildet, genau dann, wenn (z_1, z_2, z_3, z_4) und (w_1, w_2, w_3, w_4) dasselbe Doppelverhältnis λ haben. Wir behaupten, dass

$$[w_1, w_2; w_3, w_4] \in \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}$$

genau dann, wenn die j -Invariante von $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ gleich $2^8 \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$ ist.

Die Behauptung ist dazu äquivalent, dass $\mathbb{C}(j)$ genau der Fixkörper $\mathbb{C}(\lambda)^G$ der anharmonischen Gruppe

$$G = \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}$$

als Automorphismengruppe von $\mathbb{C}(\lambda)$ ist. Aus der Galois-Theorie weiß man: $\mathbb{C}(\lambda)/\mathbb{C}(\lambda)^G$ ist eine Körpererweiterung von Grad

$$[\mathbb{C}(\lambda) : \mathbb{C}(\lambda)^G] = |\text{Gal}(\mathbb{C}(\lambda)/\mathbb{C}(\lambda)^G)| = |G| = 6.$$

Andererseits ist

$$\mathbb{C}(\lambda) \subseteq \mathbb{C}(\lambda)^G \subseteq \mathbb{C}(j),$$

und λ ist Wurzel vom Polynom

$$2^8(1 - X + X^2)^3 - j \cdot X^2(1 - X)^2 \in \mathbb{C}(j)[X]$$

von Grad 6. Darum muss schon $\mathbb{C}(\lambda)^G = \mathbb{C}(j)$ gelten. □

Jetzt kommen wir zum Hauptergebnis:

Satz 5.32. Seien $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ und $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ zwei Mengen paarweise verschiedener Elemente aus $\hat{\mathbb{C}}$. Dann sind äquivalent:

(i) Die elliptischen Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}}, \quad \int \frac{dw}{\sqrt{(w - \beta_1)(w - \beta_2)(w - \beta_3)(w - \beta_4)}}$$

werden (bis auf einen konstanten Vorfaktor $t \in \mathbb{C}^\times$) durch eine Möbiustransformation

$$w = \varphi(x)$$

ineinander überführt;

(ii) Die Periodengitter $L^A = \mathbb{Z}\omega_1^A \oplus \mathbb{Z}\omega_2^A$ und $L^B = \mathbb{Z}\omega_1^B \oplus \mathbb{Z}\omega_2^B$ sind bis auf einen Vorfaktor gleich:

$$L^B = t \cdot L^A = \mathbb{Z}t\omega_1^A \oplus \mathbb{Z}t\omega_2^A \quad \text{mit } t \in \mathbb{C}^\times;$$

(iii) Die j -Invarianten von A und B stimmen überein.

Wenn $\alpha_i = \infty$ oder $\beta_i = \infty$, soll nach Konvention der Faktor $(x - \alpha_i)$ bzw. $(y - \beta_i)$ weggelassen werden.

Die j -Invariante der Menge $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ nennen wir auch j -Invariante der Kurve

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

oder j -Invariante des Periodengitters:

$$j = j(\omega_1, \omega_2).$$

Mit diesem Satz können wir elliptische Integrale der Form $\int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}}$ auf verschiedene Normalformen reduzieren:

1. Weierstraß-Normalform:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad \text{mit } e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Die Verzweigungspunkte sind $\alpha_1 = e_1$, $\alpha_2 = e_2$, $\alpha_3 = e_3$ und $\alpha_4 = \infty$. Das Doppelverhältnis ist

$$\lambda = [e_1, e_2; e_3, \infty] = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}$$

und die j -Invariante ist

$$j = 864 \cdot \frac{(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^3}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2} = 1728 \cdot \frac{g_2^3}{g_3^3 - 27g_3^2}.$$

2. Legendre- oder Riemann-Normalform:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}.$$

Die Verzweigungspunkte sind $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = \lambda$. Das Doppelverhältnis ist λ , und die j -Invariante ist

$$j = 256 \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

3. Jacobi-Normalform:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k \notin \{1, -1, 0, \infty\}$$

Die Verzweigungspunkte sind $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/k$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -1/k$. Das Doppelverhältnis ist

$$\lambda = [1, 1/k; -1, -1/k] = \frac{4k}{(k+1)^2}$$

und die j -Invariante ist

$$j = 16 \cdot \frac{(k^4 + 14k^2 + 1)^3}{k^2(k^2 - 1)^4}.$$

Beweis. (i) \Leftrightarrow (iii): Angenommen, es gibt es eine Möbiustransformation $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, die A auf B abbildet. Wir behaupten, dass die Transformation $w = \varphi(z)$ das Gewünschte liefert.

Wir betrachten den Fall $\beta_i = \infty$ getrennt; seien zunächst alle $\beta_i \neq \infty$. Da $\varphi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, erhalten wir mit $w = \varphi(x)$

$$\frac{dw}{\sqrt{(w-\beta_1)(w-\beta_2)(w-\beta_3)(w-\beta_4)}} = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

mit einem Polynom P , dessen Nullstellen in den Punkten $\alpha_i = \varphi^{-1}(\beta_i)$ liegen (mit Ausnahme von ∞ , falls $\alpha_i = \infty$ vorkommt). Das ist ein Vielfaches von $\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_4)}}$.

Falls andererseits (o.B.d.A.) $\beta_4 = \infty$, so erhalten wir

$$\frac{dw}{\sqrt{(w-\beta_1)(w-\beta_2)(w-\beta_3)}} = \frac{dx}{\sqrt{P(x)(cx+d)}}$$

mit einem Polynom P , dessen Nullstellen in den Punkten $\alpha_i = \varphi^{-1}(\beta_i)$ liegen (wieder mit Ausnahme von ∞). Mit dem Faktor $cx+d$ im Nenner erhalten wir die fehlende Nullstelle in $\alpha_4 = -d/c = \varphi^{-1}(\infty)$.

Umgekehrt: wenn $w = \varphi(z)$ das Integral wie in (i) transformiert, dann muss φ notwendig die Menge A der Verzweigungspunkte auf B abbildet. Nach Lemma sind

dann die j -Invarianten von A und B gleich.

(i) \Rightarrow (ii): Falls

$$\int \frac{dw}{\sqrt{(w - \beta_1)(w - \beta_2)(w - \beta_3)(w - \beta_4)}} = t \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}}$$

mit der Möbiustransformation $w = \varphi(x)$, dann sind die Perioden durch

$$\oint_{\gamma} \frac{dw}{\sqrt{(w - \beta_1)(w - \beta_2)(w - \beta_3)(w - \beta_4)}} = t \cdot \oint_{\varphi^{-1} \circ \gamma} \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)}}$$

miteinander verbunden, d.h. $L^B = t \cdot L^A$.

(ii) \Rightarrow (iii) Bis auf Möbiustransformationen dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass die Integrale bereits in Weierstraß-Normalform sind:

$$A = \{e_1^A, e_2^A, e_3^A, \infty\}, \quad B = \{e_1^B, e_2^B, e_3^B, \infty\}$$

mit $e_1^A + e_2^A + e_3^A = e_1^B + e_2^B + e_3^B = 0$.

Angenommen, für die Periodengitter gilt $L^B = t \cdot L^A$. Wir vergleichen die Weierstraß'schen \wp -Funktionen von L^B und L^A miteinander:

$$\begin{aligned} \wp(L^B; tz) &= \frac{1}{t^2 z^2} + \sum_{\substack{\omega \in L^B \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(tz - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{t^2 z^2} + \sum_{\substack{\omega \in L^A \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(tz - t\omega)^2} - \frac{1}{t^2 \omega^2} \right) \\ &= t^{-2} \cdot \wp(L^A; z). \end{aligned}$$

Falls $L^A = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, so erhalten wir beim Einsetzen der Halbperioden $z = \omega_i/2$ (sodass tz Halbperiode in L^B ist)

$$e_1(L^B) = t^{-2}e_1(L^A), \quad e_2(L^B) = t^{-2}e_2(L^A), \quad e_3(L^B) = t^{-2}e_3(L^A).$$

Die Tupeln $(e_1(L^A), e_2(L^A), e_3(L^A), \infty)$ und $(t^{-2}e_1(L^A), t^{-2}e_2(L^A), t^{-2}e_3(L^A), \infty)$ haben aber das gleiche Doppelverhältnis und damit auch die gleiche j -Invariante. \square

5.6. Der Körper der elliptischen Funktionen

Den vorhergehenden Abschnitt kann man so zusammenfassen: das Inversionsproblem zu jedem elliptischen Integral der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

besitzt eine Lösung der Form

$$f(z) = \frac{a\wp(z) + b}{c\wp(z) + d}$$

mit einer geeigneten Matrix bzw. Möbiustransformation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und einer geeigneten Weierstraß'schen \wp -Funktion $\wp(z)$.

Wir werden allgemeiner zeigen, dass man mit \wp bereits (mehr oder weniger) *alle* elliptischen Funktionen kennt.

Sei L ein Gitter.

Lemma 5.33. *Die elliptischen Funktionen mit Periodengitter L bilden einen Zwischenkörper $K(L)$ in der Körpererweiterung \mathcal{M}/\mathbb{C} (dabei ist \mathcal{M} der Körper der meromorphen Funktionen auf \mathbb{C} , und \mathbb{C} der Körper der konstanten Funktionen), die unter Ableitung abgeschlossen ist.*

Beweis. Mit $f, g \in K(L)$ und $f \neq 0$ rechnet man nach, dass für $h = f + g, f \cdot g, f^{-1}, f'$ die Funktionalgleichung

$$h(z + \omega) = h(z), \quad \omega \in L$$

immer noch erfüllt ist. □

Mit der Weierstraß-Funktion $\wp(z)$ und ihre Ableitung $\wp'(z)$ haben wir bereits den Körper der elliptischen Funktionen zu L erzeugt:

Satz 5.34. (i) *Jede gerade elliptische Funktion ist eine rationale Funktion in \wp .*
(ii) *Der Körper der elliptischen Funktionen ist*

$$K(L) = \mathbb{C}(\wp) \oplus \wp' \cdot \mathbb{C}(\wp).$$

(iii) *Die Abbildung $(X, Y) \mapsto (\wp, \wp')$ definiert einen Körperisomorphismus*

$$\mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - p(X)) \cong K(L)$$

mit dem Polynom $p(X) = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$.

Insbesondere ist $K(L)$ genau der algebraische Abschluß von $\mathbb{C}(\wp)$.

Beweis. (i) Sei f eine gerade elliptische Funktion. Seien $m_1, m_2, m_3 \in 2\mathbb{Z}$ die Ordnungen von f in $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$. (Diese Ordnungen müssen gerade sein, da f selbst gerade ist: falls $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $2\lambda \in L$, und f die Laurententwicklung

$$f(z) = a_m(z - \lambda)^m + \sum_{n>m} a_n(z - \lambda)^n, \quad a_m \neq 0$$

um $z = \lambda$ besitzt, so ist

$$f(z) = f(-z) = f(-z + 2\lambda) = (-1)^m a_m(z - \lambda)^m = O(z - \lambda)^{m+1}$$

und damit $(-1)^m = 1$.) Wir schreiben die anderen Nullstellen von f (mit Vielfachheiten) in der Form

$$\pm a_1, \dots, \pm a_k$$

sowie die anderen Polstellen von f in der Form

$$\pm b_1, \dots, \pm b_\ell.$$

Nach Konstruktion ist

$$\frac{f(z)}{(\wp(z) - e_1)^{m_1/2}(\wp(z) - e_2)^{m_2/2}(\wp(z) - e_3)^{m_3/2}} \times \frac{\prod_{i=1}^{\ell} (\wp(z) - \wp(b_i))}{\prod_{i=1}^k (\wp(z) - \wp(a_i))}$$

eine elliptische Funktion, die außerhalb der Gitterpunkte weder Null- noch Polstelle hat. Nach den Sätzen von Liouville ist diese Funktion konstant.

(ii) Für eine ungerade elliptische Funktion f ist f/\wp' gerade und nach (i) in $\mathbb{C}(\wp)$ enthalten. Allgemein zerlegen wir die elliptische Funktion f in der Form

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z) + f(-z)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{f(z) - f(-z)}{2}}_{\text{ungerade}} \in \mathbb{C}(\wp) \oplus \wp' \cdot \mathbb{C}(\wp).$$

(iii) Wegen der Weierstraß'schen Differentialgleichung liegt $Y^2 - p(X)$ im Kern des Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{C}(X)[Y] \longrightarrow K(L), \quad (X, Y) \mapsto (\wp, \wp').$$

Der Kern von φ ist ein Primideal in $\mathbb{C}(X)[Y]$. Da $Y^2 - p(X)$ irreduzibel ist (es kann keine Nullstellen haben, weil $\text{grad } p$ ungerade ist) und $\mathbb{C}(X)[Y]$ ein Hauptidealring ist, erhalten wir

$$\ker \varphi = (Y^2 - p(X)). \quad \square$$

Korollar 5.35. *Für jede zwei elliptische Funktionen f, g zum gleichen Periodengitter existiert ein nicht-konstantes Polynom $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit*

$$P(f, g) = 0.$$

Insbesondere erfüllt jede elliptische Funktion f eine algebraische Differentialgleichung der Form

$$P(f, f') = 0.$$

Beweis. $K(L) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - p(X))$ ist eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{C}(X)$ und damit vom Transzendenzgrad 1 über \mathbb{C} . Damit müssen f und g algebraisch abhängig sein. \square

5.7. Additionssätze

Sei L ein Periodengitter und

$$p(X) := 4X^3 - g_2X - g_3$$

das zugehörige Weierstraß-Polynom.

Der Quotientenraum \mathbb{C}/L kann man abstrakt als Torus auffassen: falls L die Basis ω_1, ω_2 hat, ist

$$\mathbb{C}/L = (\mathbb{R}\omega_1 \oplus \mathbb{R}\omega_2)/(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

und \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist via $x \mapsto e^{2\pi ix}$ homöomorph zum Kreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Mit den Sätzen von Liouville sieht man, dass

$$(\wp, \wp') : (\mathbb{C}/L) \setminus \{0\} \longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = p(x)\}$$

bijektiv ist (sogar biholomorph, wenn wir beide Seiten als Riemann'sche Flächen auffassen). Durch Hinzufügen von einem Punkt in ∞ erhalten wir die bijektive Abbildung

$$(\wp, \wp') : \mathbb{C}/L \xrightarrow{\sim} E := \{\infty\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = p(x)\},$$

die \mathbb{C}/L mit der **elliptischen Kurve** E identifiziert.

\mathbb{C}/L ist aber eine Gruppe. Durch (\wp, \wp') erhalten wir eine Gruppenoperation auf der Kurve E . Wie sieht sie aus?

Da die Gruppenoperation auf \mathbb{C}/L einfach die Addition ist, geht es eigentlich nur darum, eine Darstellung von $\wp(z+w)$ als rationale Funktion in $(\wp(z), \wp'(z))$ und $(\wp(w), \wp'(w))$ für $z, w \in \mathbb{C}$ zu finden. Da $\wp(z+w)$ selbst eine elliptische Funktion ist (sowohl als Funktion von z bei festem w , als auch von w bei festem z) ist es zumindest abstrakt klar, dass eine solche Darstellung existiert. Die explizite Darstellung nennt man den **Additionssatz** für $\wp(z)$.

Proposition 5.36. *Seien $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus L$ mit $a + b + c \in L$. Dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(a) & \wp(b) & \wp(c) \\ \wp'(a) & \wp'(b) & \wp'(c) \end{pmatrix} = 0.$$

Mit anderen Worten: die Punkte $(\wp(a), \wp'(a))$, $(\wp(b), \wp'(b))$ und $(\wp(c), \wp'(c))$ liegen auf einer gemeinsamen Gerade in \mathbb{C}^2 .

Beweis. Wir halten a, b fest (aber verschieden modulo L ; sonst sind die ersten zwei Spalten gleich, und die Determinante ist sowieso 0) und fassen die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(a) & \wp(b) & \wp(z) \\ \wp'(a) & \wp'(b) & \wp'(z) \end{pmatrix}$$

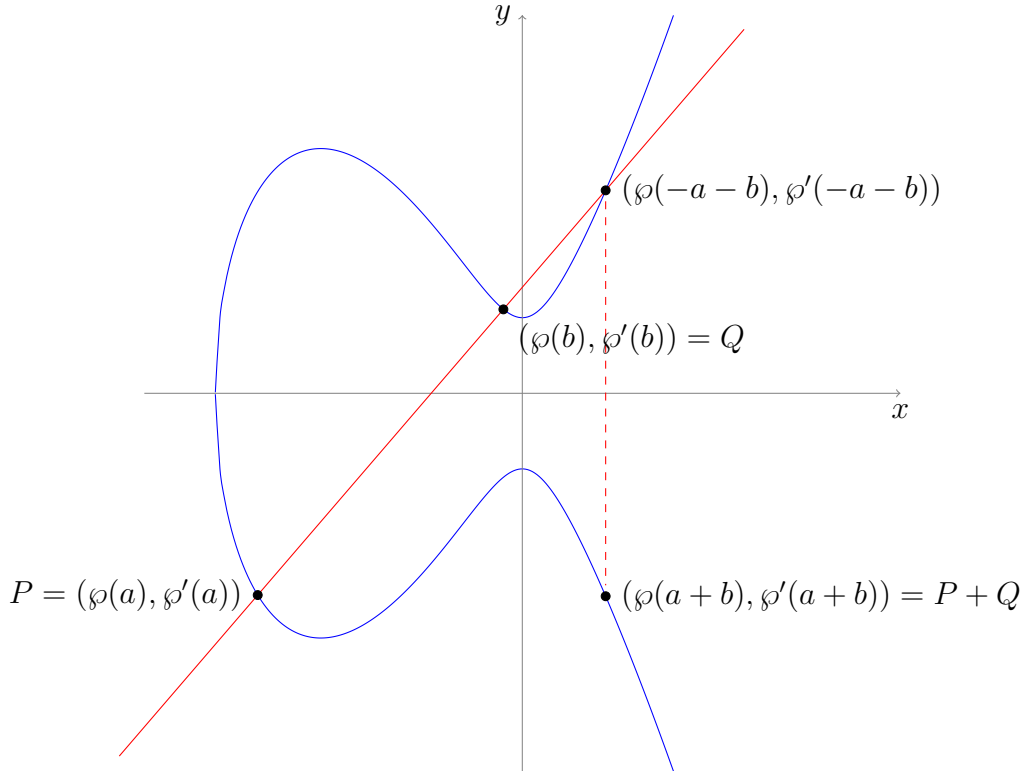
als elliptische Funktion in der Variablen z auf. Sie besitzt genau einen Pol dritter Ordnung modulo L in $z = 0$, und sie besitzt (einfache) Nullstellen in $z = a$ und $z = b$. Nach dem 3. Satz von Liouville gibt es genau eine weitere Nullstelle c modulo L , und nach dem 4. Satz von Liouville ist sie durch

$$a + b + c \equiv 3 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{L}$$

bestimmt. □

Das Additionsgesetz auf der elliptischen Kurve E ist also wie folgt gegeben: für verschiedene Punkte $P, Q \in E$ bildet man die eindeutige Gerade ℓ durch P und Q . Diese Gerade schneidet E in drei Punkten: P , Q und einen dritten Punkt, etwa (x, y) . (Der dritte Punkt kann auch ∞ sein!) Dann ist

$$P + Q := (x, -y).$$



Figur 5.12: Gruppengesetz auf der Kurve $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$

Falls P und Q dieselbe Abszisse haben, ist $P + Q = \infty$. Falls $P = Q$, bildet man stattdessen die Tangente ℓ zur Kurve in P .

Da 0 das neutrale Element in \mathbb{C}/L ist, ist natürlich $\infty = (\varphi(0), \varphi'(0))$ das neutrale Element auf E .

Eine explizite Formel für die Addition in E gibt der folgende Satz:

Satz 5.37. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z \pm w \notin L$. Dann gilt

$$\varphi(z + w) = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi'(z) - \varphi'(w)}{\varphi(z) - \varphi(w)} \right)^2 - \varphi(z) - \varphi(w).$$

Für $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2) \in E$ hat $P + Q$ also die Abszisse

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - (x_2 + x_1).$$

Die Ordinate y ist dadurch bestimmt, dass (x_1, y_1) , (x_2, y_2) und $(x, -y)$ auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Beweis. Sei w fest und o.B.d.A $w \neq 0, \omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ modulo L . (Die Behauptung folgt dann auch für diese w mit einem Stetigkeitsargument.)

Wir betrachten

$$f(z) := \wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) - \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2$$

als elliptische Funktion in der Variablen z . Dann hat f höchstens Pole in den Punkten $z = 0$ oder $z = \pm w$ modulo L . Wenn wir zeigen können, dass sich die Hauptteile von f um 0 und $-w$ verschwinden, ist f nach dem 1. Satz von Liouville konstant.

Um $z = 0$ haben wir die Laurententwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\wp(w) + z\wp'(w) + O(z^2) \right) + \left(\frac{1}{z^2} + O(z^2) \right) + \wp(w) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{-2/z^3 - \wp'(w) + O(z)}{1/z^2 - \wp(w) + O(z^2)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{z^2} + 2\wp(w) + \wp'(w)z + O(z^2) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{z^2} + 8\wp(w) + 4\wp'(w)z + O(z^2) \right) \\ &= O(z^2), \end{aligned}$$

und um $z = -w$ das Hauptteil

$$\begin{aligned} f(z-w) &= \wp(z) + \wp(z-w) + \wp(w) - \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z-w) - \wp'(w)}{\wp(z-w) - \wp(w)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{z^2} + O(1) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{-2\wp'(w) + O(z)}{-z\wp'(w) + O(z^2)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{z^2} + O(1) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{z^2} + O(1) \right) = O(1), \end{aligned}$$

sodass weder $z = 0$ noch $z = -w$ ein Pol von $f(z)$ ist. Dann ist f eine ganze elliptische Funktion, also konstant. Da $f(0) = 0$, ist f identisch 0 . \square

Korollar 5.38. Sei $z \notin \frac{1}{2}L$. Dann gilt

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z).$$

Beweis. Man bilde den Grenzwert $z \rightarrow w$ im Additionssatz für $\wp(z+w)$. \square

Korollar 5.39. Sei f eine elliptische Funktion. Dann existiert ein nichttriviales Polynom $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mit

$$P\left(f(z+w), f(z), f(w)\right) \equiv 0, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Mit anderen Worten: auch für $f(z)$ gilt ein Additionssatz.

Beweis. Nach dem Additionssatz für $\wp(z)$ ist der Körper

$$K := \mathbb{C}(\wp(z), \wp(w), \wp(z+w))$$

vom Transzendenzgrad 2 über \mathbb{C} . Da $\mathbb{C}(f, \wp)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{C}(\wp)$ ist, ist auch

$$K(f(z), f(w), f(z+w))$$

eine algebraische Erweiterung von K . Damit hat auch $\mathbb{C}(f(z), f(w), f(z+w))$ den Transzendenzgrad 2 über \mathbb{C} (solange f nicht konstant ist), sodass $f(z+w), f(z), f(w)$ über \mathbb{C} algebraisch abhängig sein müssen. \square

6. Modulformen

Zu jedem Gitter $L \subseteq \mathbb{C}$ haben wir die Weierstraß'sche \wp -Funktion

$$\wp(L; z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

definiert.

Von jetzt an werden wir \wp auch als Funktion von L ansehen. Die Menge der Tupeln (ω_1, ω_2) , die ein Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ aufspannen, bildet eine offene Teilmenge Ω_{\pm} von \mathbb{C}^2 und die Funktion

$$\wp : \{(\omega_1, \omega_2, z) \in \Omega_{\pm} \times \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist in jeder Variable (wenn die anderen zwei festgehalten werden) holomorph:

$$\wp(\omega_1, \omega_2; z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right).$$

So kann man $\wp(L; z)$ sinnvoll als *Funktion von L* holomorph nennen.

Damit sind aber auch mehrere andere Objekte, die bisher als Konstanten betrachtet wurden aber eigentlich von L oder (ω_1, ω_2) abhängen, wie etwa g_2, g_3 oder e_1, e_2, e_3 oder das Doppelverhältnis λ oder die j -Invariante, als holomorphe Funktionen zu verstehen. Solche Funktionen nennt man *Modulformen* und wir werden sie in diesem Kapitel allgemeiner untersuchen.

6.1. Gitterfunktionen

\mathbb{H} bezeichnet die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{\tau = x + iy : x, y \in \mathbb{R} : y > 0\}.$$

Sei Ω der Raum

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 : \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \text{ ist ein Gitter und } \tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}\}.$$

(Für ein Gitter ist ω_1/ω_2 immer nicht reell. Wir verlangen $\tau \in \mathbb{H}$ damit Ω zusammenhängt.)

Als Vereinigung

$$\Omega = \bigcup_{\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \left(\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im}[\omega_1/\omega_2] > 0\} \right)$$

offener Mengen ist Ω selbst eine offene Teilmenge der \mathbb{C}^2 .

Sei $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ und seien U_1, U_2 Umgebungen von ω_i mit der Eigenschaft

$$U_1 \times \{\omega_2\}, \quad \{\omega_1\} \times U_2 \subseteq \Omega.$$

Eine Funktion

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

nennt man **holomorph** im Punkt $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, falls die Funktionen

$$U_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \omega_1 \mapsto F(\omega_1, \omega_2)$$

und

$$U_2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \omega_2 \mapsto F(\omega_1, \omega_2)$$

holomorph sind.

N.B. Nach einem Satz von Hartogs¹ ist dieser Begriff äquivalent zum üblichen Begriff einer analytischen Funktion: um jeden Punkt in Ω gibt es eine offene Umgebung, auf der F durch seine Potenzreihe (in zwei Variablen) dargestellt wird. Insbesondere ist F automatisch auch stetig und (total) differenzierbar. Wir gehen nicht weiter darauf ein.

Definition 6.1. (i) Eine holomorphe Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Gitterfunktion**, wenn

$$\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega'_1 \oplus \mathbb{Z}\omega'_2 \implies F(\omega_1, \omega_2) = F(\omega'_1, \omega'_2).$$

(ii) Eine Gitterfunktion F ist **homogen vom Gewicht k** , falls

$$F(t\omega_1, t\omega_2) = t^{-k}F(\omega_1, \omega_2) \quad \text{für } t \in \mathbb{C}^\times, (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Bemerkung 6.2. Schreibt man

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

so ist die Bedingung

$$\mathbb{Z}\omega'_1 \oplus \mathbb{Z}\omega'_2 = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$$

¹vgl. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Theorem 2.2.8

dazu äquivalent, dass $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegt: M muss nämlich ganzzahlige Einträge haben, eine ganzzahlige Inverse besitzen, und die Orientierung auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ respektieren (d.h. Determinante +1 und nicht -1 haben).

Lemma 6.3. *Die Abbildung*

$$F \mapsto f, \quad f(\tau) := F(\tau, 1)$$

ist eine Bijektion zwischen den folgenden zwei Mengen:

- (i) Homogene Gitterfunktionen $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vom Gewicht k ;
- (ii) Holomorphe Funktionen $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, die den Funktionalgleichungen

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

genügen.

Hier ist $\mathbb{H} = \{\tau = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ die obere Halbebene.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei F homogene Gitterfunktion. Dann gilt

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, 1\right) = (c\tau + d)^k \cdot F(a\tau + b, c\tau + d)$$

nach Homogenität, sowie

$$F(a\tau + b, c\tau + d) = F(\tau, 1),$$

da $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}(a\tau + b) \oplus \mathbb{Z}(c\tau + d)$ das gleiche Gitter definieren.

(ii) \Rightarrow (i): Umgekehrt: gegeben f , muss die homogene Gitterfunktion F durch

$$F(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right) = \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2)$$

definiert werden. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erhält man

$$\begin{aligned} & F(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) \\ &= (c\omega_1 + d\omega_2)^{-k} f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right) \\ &= \omega_2^{-k} \left(c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d\right)^{-k} f\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d}\right) \\ &= \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2) = F(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

d.h. F ist Gitterfunktion. Nach Konstruktion ist F homogen vom Gewicht k . \square

6.2. Der Fundamentalbereich

Für die Untersuchung von Funktionen $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, die die Funktionalgleichungen

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

genügen, müssen wir zuerst die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} besser verstehen.

Wir schreiben abkürzend

$$\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Für $\tau \in \mathbb{H}$ bezeichnet

$$\Gamma \cdot \tau = \left\{ \frac{a\tau + b}{c\tau + d} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

die *Bahn* von τ unter Γ .

Den Imaginärteil y von einem Punkt $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ nennt man anschaulich auch seine *Höhe*.

Zwei Matrizen in Γ wollen wir besonders hervorheben:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Möbiustransformation die Translation $\tau \mapsto \tau + 1$ ist, und

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Möbiustransformation die Spiegelung am Einheitskreis $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ ist.

Lemma 6.4. *In jeder Bahn $\Gamma \cdot \tau$ bleibt die Höhe beschränkt.*

Beweis. Sei $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ beliebig. Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ rechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left[\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right] &= \mathrm{Im}\left[\frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2}\right] \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{a|\tau|^2 + bd + (ad + bc)x}{|c\tau + d|^2} + \frac{(ad - bc)iy}{|c\tau + d|^2}\right] \\ &= \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \cdot y \\ &= \frac{y}{|c\tau + d|^2}. \end{aligned}$$

Erst in der letzten Gleichung verwenden wir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Die Höhe von $M \cdot \tau$ ist also $\frac{y}{|c\tau+d|^2}$. Wenn das größer als y selbst sein soll, dann muss $c\tau+d$ sowohl in der diskreten Menge $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ als auch im Kompaktum $\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ enthalten sein. Damit kann es nur endlich viele möglichen Werte für $c\tau+d$, also auch endlich viele höheren Höhen als y , in der Bahn $\Gamma \cdot \tau$ geben. \square

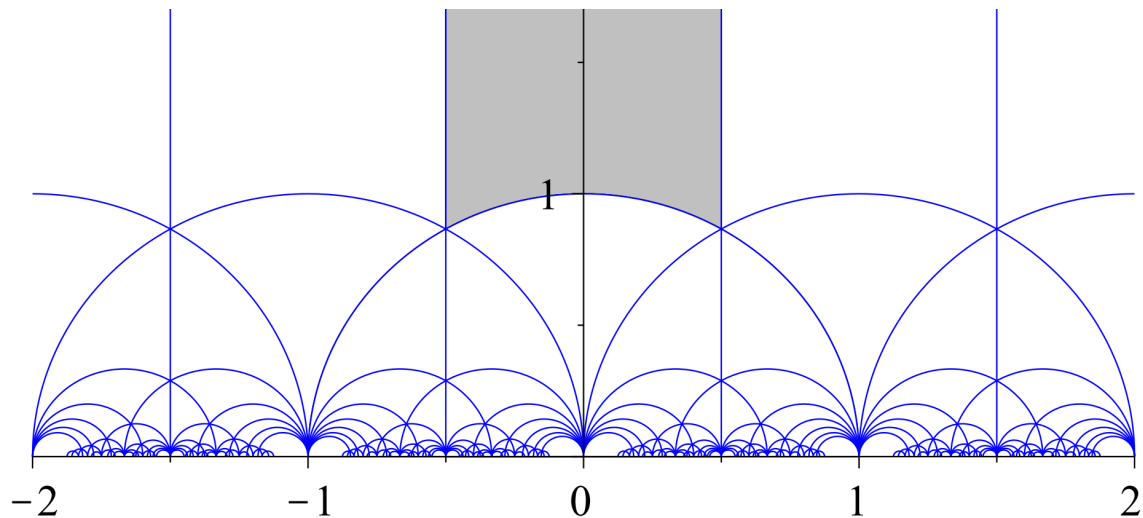
Satz 6.5. Die Menge

$$\mathcal{F} = \{x + iy \in \mathbb{H} : -1/2 < x < 1/2, x^2 + y^2 > 1\}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \Gamma$ mit $M \cdot \tau \in \overline{\mathcal{F}}$;
- (ii) Falls $\tau, w \in \mathcal{F}$ und $M \in \Gamma$ existieren mit $M \cdot \tau = w$, dann gilt $\tau = w$ und $M = \pm I$.

\mathcal{F} nennt man *Standard-Fundamentbereich* für Γ .



Figur 6.1: Fundamentalbereich der Modulgruppe. (Bild von Wikipedia)

Beweis. (i) Sei $\tau \in \mathbb{H}$ fest und sei $w \in \Gamma \cdot \tau$, ein Punkt, der unter allen Punkten der Bahn $\Gamma \cdot \tau$ die maximale Höhe hat. (Nach Lemma existiert ein solches w .) Da

$$\mathrm{Im}[w] \geq \mathrm{Im}[S \cdot w] = \frac{\mathrm{Im}[w]}{|w|^2},$$

muss $|w|^2 \geq 1$ gelten. Sobald wir eine passende Translation

$$T^b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \tau \mapsto \tau + b, \quad b \in \mathbb{Z}$$

anwenden, landet w in $\overline{\mathcal{F}}$.

(ii) Sei $\tau = x + iy \in \mathcal{F}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $w = M \cdot \tau \in \mathcal{F}$. Ohne Einschränkung gelte $\text{Im}[w] \geq \text{Im}[\tau]$ (sonst vertauschen wir die Rollen von w und $\tau = M^{-1} \cdot w$).

Falls $c \neq 0$, gilt

$$y \leq \text{Im}[w] = \frac{y}{|c\tau + d|^2} \geq \frac{y}{\text{Im}[c\tau + d]^2} = \frac{1}{c^2 y}.$$

Da $\text{Im}[\tau]$ in \mathcal{F} mindestens $\sqrt{3}/2$ ist, folgt

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \text{Im}[w] = \frac{1}{c^2 y} < \frac{2}{c^2 \sqrt{3}},$$

also $|c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ und damit $c = \pm 1$. Aber aus $y \leq \frac{y}{|\pm\tau + d|^2}$ folgt

$$1 \geq |\pm\tau + d|^2 \geq |\tau|^2 > 1;$$

Widerspruch.

Also muss $c = 0$ sein. Da $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ganzzahlig ist und Determinante 1 hat, gilt $a = d = \pm 1$. Da

$$x + b = \text{Re}[w] \in (-1/2, 1/2) \text{ und } x \in (-1/2, 1/2),$$

muss $b = 0$ sein, d.h. $M = \pm I$.

□

Korollar 6.6. Die Modulgruppe Γ wird von $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt.

Jede Möbiustransformation

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

kann also als Verkettung von Kreisspiegelungen $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ und Translationen $\tau \mapsto \tau + 1$ geschrieben werden. Insbesondere werden alle Funktionalgleichungen

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

bereits von den zwei Funktionalgleichungen

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau) \quad \text{und} \quad f(\tau + 1) = f(\tau)$$

impliziert.

Beweis. Sei $G \leq \Gamma$ die Untergruppe, die von S und T erzeugt wird (N.B. G enthält $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S^2$), sei $M \in \Gamma$ eine beliebige Matrix und $w \in \mathcal{F}$ ein beliebiger Punkt. Wir schreiben $w^* := M \cdot w$. Sei

$$\tau = x + iy = N \cdot w^* \in G \cdot w^*$$

ein Punkt von maximaler Höhe in der Bahn von w^* unter G . Wegen

$$\frac{y}{|\tau|^2} = \text{Im}[S \cdot \tau] \leq \text{Im}[\tau] = y$$

folgt $|\tau| \geq 1$; und nach einer Translation erreichen wir o.B.d.A. $\tau \in \overline{\mathcal{F}}$. Da $\tau \in \Gamma \cdot w$ mit $w \in \mathcal{F}$, muss sogar $\tau \in \mathcal{F}$ sein. Es gilt also

$$\tau = N \cdot w^* = (NM) \cdot w \in \mathcal{F}.$$

Aus der Fundamentalbereich-Eigenschaft folgt $MN = \pm I$, also $M = \pm N \in G$. \square

Der Beweis ist eigentlich konstruktiv und ergibt einen Algorithmus, Elemente $M \in \Gamma$ durch die Erzeuger S und T darzustellen:

- (i) Sei $\alpha_1 := M \cdot \infty = \frac{a}{c}$.
- (ii) Falls $\alpha_1 = \infty$ (d.h. $c = 0$), dann ist M bereits von der Form $\pm T^b$ mit $b \in \mathbb{Z}$. Sonst kann man $b_1 \in \mathbb{Z}$ zu w addieren, sodass für das Bild $\frac{a'}{c}$ gilt $|a'| < c$.
- (iii) Wir betrachten jetzt

$$\alpha_2 := S \cdot (\alpha_1 + b_1) = -\frac{c}{a'}.$$

Falls $a' = 0$, so ist $\infty = (ST^{b_1}) \cdot \alpha_1 = (ST^{b_1}M) \cdot \infty$ und deswegen $ST^{b_1}M = \pm T^{b_2}$ mit $b_2 \in \mathbb{Z}$. Sonst addieren wir eine Zahl $b_2 \in \mathbb{Z}$ zu $-\frac{c}{a'}$, sodass der neue Zähler betragsmässig kleiner als der Nenner a' ist.

Der Nenner wird in jedem Schritt kleiner und wird irgendwann 0, sodass wir nach endlich vielen Schritten einen Ausdruck der Form

$$ST^{b_n} ST^{b_{n-1}} \dots ST^{b_1} \cdot M$$

finden, der ∞ auf ∞ abbildet und selbst bis auf \pm eine Potenz von T sein muss. Das Minuszeichen entfernt man ggf. durch Multiplizieren mit $S^2 = -I$.

N.B. Der Ausdruck ist nicht eindeutig!

6.3. Modulformen

6.3.1. Modulformen

Für die Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lautet die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

einfach $f(\tau + 1) = f(\tau)$. Damit besitzt für jede homogene Gitterfunktion F (von irgendeinem Gewicht) die Funktion

$$f(\tau) = F(\tau, 1)$$

eine Fourier-Entwicklung:

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Definition 6.7. Eine **Modulform** (zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) von Gewicht k ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften:

(i) $f(\tau) = F(\tau, 1)$ für eine homogene Gitterfunktion F von Gewicht k :

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z});$$

(ii) Die Fourier-Entwicklung von f läuft nur über positive Exponenten:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}.$$

Für die Fourier-Entwicklung verwendet man oft die Notation

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

mit der Variablen $q = e^{2\pi i \tau}$.

Wir nennen f *schwache Modulform*, falls ihre Fourier-Entwicklung stattdessen nur die Form

$$f(\tau) = \sum_{n \geq -N}^{\infty} a_n q^n$$

besitzt. Eine schwache Modulform von Gewicht 0 heißt **Modulfunktion**.

Andererseits nennen wir f **Spitzenform**, wenn der konstante Term der Fourier-Entwicklung nicht auftritt: wenn also

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}.$$

Bedingung (ii) ist eine Wachstumsbedingung im Limes $\text{Im}[\tau] \rightarrow \infty$: sie ist äquivalent dazu, dass der Limes

$$a_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} f(x + iy)$$

existiert. In der Auffassung als Gitterfunktion beschreibt Bedingung (ii) das Wachstum von $f(\omega_1, \omega_2)$, wenn $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ gegen eine eindimensionale diskrete Untergruppe von \mathbb{C} tendiert, d.h. wenn $\tau = \omega_1/\omega_2$ einer Zahl aus $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ annähert - die sogenannten **Spitzen**.

(Visuell sind das wirklich Spitzen in den Bildern von \mathcal{F} unter $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, vgl. Figur 6.1.) Eine Spitzenform ist also eine Modulform, die in alle Spitzen verschwindet.

Bemerkung 6.8. (i) Für Modulformen f, g vom gleichen Gewicht k ist auch jede Linearkombination

$$\alpha f + \beta g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

wieder eine Modulform von Gewicht k . Die Modulformen von Gewicht k bilden einen Vektorraum

$$M_k = \left\{ \text{Modulformen } f \text{ von Gewicht } k \right\}.$$

(ii) Für $f \in M_k$ und $g \in M_\ell$ ist das Produkt fg eine Modulform von Gewicht $k + \ell$:

$$M_k \cdot M_\ell \subseteq M_{k+\ell}.$$

Damit hat die Menge aller Modulformen

$$M_* = \bigoplus_k M_k$$

die Struktur von einem *graduerten Ring*.

Bemerkung 6.9. Da der Ausdruck

$$(c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

ziemlich oft vorkommt, verwendet man die abkürzende Schreibweise:

$$f \Big|_k M := (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Das ist der *Petersson'sche Strichoperator*. Für die zugehörige Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Raum der Gitter ist

$$f \Big|_k M(\tau) = F(a\tau + b, c\tau + d).$$

Einige Einschränkungen an das Gewicht erhält man schnell.

Proposition 6.10. (i) Jede Modulform von ungeradem Gewicht verschwindet identisch.
(ii) Jede Modulform von negativem Gewicht verschwindet identisch.
(iii) Jede Modulform von Gewicht 0 ist konstant.

Beweis. (i) Die Funktionalgleichung unter $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ lautet

$$f(\tau) = f((-I) \cdot \tau) = (-1)^k f(\tau).$$

(ii), (iii) Sei f eine Modulform von Gewicht $-k$ mit $k \geq 0$. Wir schreiben $\tau = x + iy$ und betrachten die (nicht-holomorphe) Funktion

$$\tilde{f}(\tau) := y^{-k/2} |f(\tau)| = \frac{|f(\tau)|}{\operatorname{Im}[\tau]^{k/2}}.$$

Diese Funktion ist invariant unter jeder Möbiustransformation $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, denn:
aus

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{-k} f(\tau)$$

und

$$\operatorname{Im}\left[\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right] = \frac{y}{|c\tau+d|^2}$$

folgt

$$\tilde{f}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{|c\tau+d|^{-k} |f(\tau)|}{|c\tau+d|^{-k} y^{k/2}} = \tilde{f}(\tau).$$

Im Fundamentalbereich \mathcal{F} ist jede Modulform beschränkt (das ist genau die Bedingung, dass die Fourier-Entwicklung nur aus nichtnegativen Exponenten besteht). Da $k \geq 0$, ist auch $y^{-k/2}$ und damit $\tilde{f}(\tau)$ dort beschränkt. Weil $\tilde{f}(\tau)$ unter $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ invariant ist, ist $\tilde{f}(\tau)$ sogar auf ganz \mathbb{H} beschränkt: etwa

$$|\tilde{f}(\tau)| = y^{-k/2} |f(\tau)| \leq C, \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Für die Fourier-Koeffizienten a_n in

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |a_n| &= \left| \int_{0+iy}^{1+iy} f(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \right| \\
 &\leq \int_0^1 |f(x+iy)| e^{-2\pi n y} dx \\
 &\leq C \int_0^1 y^{k/2} e^{-2\pi n y} dx \\
 &= C \cdot y^{k/2} e^{-2\pi n y}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist $y > 0$ beliebig und C von y unabhängig. Im Limes $y \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{k/2} e^{-2\pi n y} = \begin{cases} 1 & : k = 0 \text{ und } n = 0; \\ 0 & : \text{sonst;} \end{cases}$$

d.h. alle Fourier-Koeffizienten von f verschwinden (außer dem konstanten Term im Fall $k = 0$). □

6.3.2. Eisensteinreihen

Die einfachsten Beispiele für Modulformen sind die Eisensteinreihen $G_k(\tau)$. Diese zugehörigen Gitterfunktionen

$$G_k(L) = \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^k}$$

haben wir bereits in der Laurent-Entwicklung von \wp gesehen:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k}.$$

Proposition 6.11. *Für gerades $k \geq 4$ ist G_k eine Modulform von Gewicht k . Die Fourier-Entwicklung von $G_k(\tau)$ ist*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2 \cdot (2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Dabei ist $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ die Summe der $(k-1)$ -ten Potenzen der Teiler von $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die absolute Konvergenz von G_k haben wir bereits gesehen. Mit $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ ist

$$G_k(L) = G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^k}$$

holomorphe Gitterfunktion, und

$$G_k(t\omega_1, t\omega_2) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(mt\omega_1 + nt\omega_2)^k} = t^{-k} G_k(\omega_1, \omega_2).$$

Die Fourier-Entwicklung von $G_k(\tau) = G_k(\tau, 1)$ berechnet man mithilfe der Entwicklung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau + n)^k} = \frac{1}{\tau^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\tau + n)^k} + \frac{1}{(\tau - n)^k} \right) = \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n \tau}$$

für $\tau \in \mathbb{H}$. Dazu verwendet man die Partialbruchzerlegung des Kotangens,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau + n} + \frac{1}{\tau - n} \right) &= \pi \cot(\pi \tau) \\ &= -\pi i \cdot \frac{1 + e^{2\pi i \tau}}{1 - e^{2\pi i \tau}} \\ &= -\pi i - 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n \tau}, \end{aligned}$$

(mit lokal gleichmäßiger Konvergenz in der Halbebene $\text{Im}[\tau] > 0$). Diese Identität leitet man dann wiederholt nach τ ab.

Für $G_k(\tau)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^k} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \\ &= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n m \tau} \right) \\ &= 2\zeta(k) + \frac{2 \cdot (2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ mn=d}} n^{k-1} e^{2\pi i d \tau} \\ &= 2\zeta(k) + \frac{2 \cdot (2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) e^{2\pi i d \tau}. \quad \square \end{aligned}$$

Die Fourier-Entwicklung von $G_k(\tau)$ vereinfacht sich deutlich, wenn wir durch den konstanten Term $2\zeta(k)$ teilen:

Korollar 6.12. Die *normalisierte Eisensteinreihe*

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau), \quad k \geq 4, \text{ gerade}$$

besitzt die Fourier-Entwicklung

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Hier ist B_k die Bernoulli-Zahl. Insbesondere sind alle Koeffizienten von E_k rational. Zum Beispiel:

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n = 1 + 240q + 2160q^2 + \dots$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n = 1 - 504q - 16632q^2 - \dots$$

$$E_8(\tau) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^n = 1 + 480q + 61920q^2 + \dots$$

Beweis. Man verwendet die speziellen Werte

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k, \quad k \geq 2 \text{ gerade.} \quad \square$$

Bemerkung 6.13. Die Fourier-Entwicklung von E_k kann man auf natürlicher Weise als *Lambert-Reihe* auffassen:

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \frac{q^n}{1 - q^n}.$$

Dazu verwendet man die geometrische Reihe:

$$\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} \frac{q^d}{1 - q^d} = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d^{k-1} q^{dm} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^{k-1} \right) q^n.$$

6.3.3. Die Diskriminante

Die Eisensteinreihen $E_4(\tau)$ und $E_6(\tau)$ kamen (bis auf Vorfaktor) als Koeffizienten in der Weierstraß-Gleichung für das Gitter $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ vor: für die Weierstraß'sche \wp -Funktion gilt

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ &= 4\wp(z)^3 - 60G_4(\tau)\wp(z) - 140G_6(\tau).\end{aligned}$$

Da die Nullstellen e_1, e_2, e_3 des Polynoms $P(x) = 4x^3 - 60G_4(\tau)x - 140G_6(\tau)$ immer paarweise verschieden sind (Lemma 5.23), wird die Diskriminante dieses Polynoms niemals 0. Die Diskriminante können wir als Modulform auffassen, die für kein $\tau \in \mathbb{H}$ verschwindet.

Allgemein definiert man für ein nichtkonstantes Polynom

$$P(X) = C \cdot \prod_{i=1}^N (X - r_i)$$

mit Nullstellen r_1, \dots, r_N die Diskriminante

$$\text{disc}(P) := C^{2(N-1)} \cdot (-1)^{N(N-1)/2} \cdot \prod_{i \neq j} (r_i - r_j).$$

Für das Polynom

$$P(X) = 4X^3 - 60G_4(\tau)X - 140G_6(\tau)$$

erhalten wir die Diskriminante

$$\Delta^*(\tau) := 256 \cdot (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2.$$

Nach dem Wurzelsatz von Vieta sind die Koeffizienten von P als elementarsymmetrische Polynome in den Nullstellen gegeben:

$$\begin{aligned}e_1 + e_2 + e_3 &= 0; \\ e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 &= -15G_4(\tau); \\ e_1e_2e_3 &= 35G_6(\tau).\end{aligned}$$

Da $\text{disc}(P)$ in den Nullstellen symmetrisch ist, weiß man aus der Algebra, dass $\text{disc}(P)$ als Ausdruck in den Koeffizienten von P darstellbar ist. Mit etwas Rechnen findet man

$$\begin{aligned}\Delta^*(\tau) &= 3456000G_4(\tau)^3 - 8467200G_6(\tau)^2 \\ &= 3456000 \left(\frac{\pi^4}{45} E_4(\tau) \right)^3 - 8467200 \left(\frac{2\pi^6}{945} E_6(\tau) \right)^2 \\ &= \frac{1024}{27} \pi^{12} \cdot \left(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2 \right) \\ &= 16 \cdot (2\pi)^{12} \cdot \left(q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 \pm \dots \right)\end{aligned}$$

Der Einfachheit halber teilen wir durch den Faktor $16 \cdot (2\pi)^{12}$.

Definition 6.14. Die **modulare Diskriminante** ist die Spitzenform

$$\Delta(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 \pm \dots \in S_{12}.$$

Wir werden später zeigen, dass die Fourier-Koeffizienten von Δ tatsächlich alle ganz sind. Das kann man auch (mit ein wenig Arbeit) von der Definition sehen.

6.3.4. Die j -Invariante

Auch die j -Invariante des Gitters $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ fassen wir als holomorphe Funktion von τ auf. Die j -Invariante ist das wichtigste Beispiel einer Modulfunktion.

Für die elliptische Kurve in Weierstraß-Normalform

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

haben wir die j -Invariante im Abschnitt 5.5 berechnet:

$$j = 1728 \cdot \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

Dabei sind

$$g_2 = 60G_4 = \frac{4}{3}\pi^4 E_4 \quad \text{und} \quad g_3 = 140G_6 = \frac{8}{27}\pi^6 E_6,$$

also

$$j = 1728 \cdot \frac{E_4^3}{E_4^3 - E_6^2} = \frac{E_4^3}{\Delta}.$$

Also:

Definition 6.15. Die **j -Invariante** ist die Modulfunktion

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} \\ &= \frac{(1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + \dots)^3}{q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 \pm \dots} \\ &= q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots \end{aligned}$$

mit $q = e^{2\pi i\tau}$.

Die j -Invariante ist also genau die j -Invariante des Periodengitters $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ im Sinne von Abschnitt 5.5.

Wir haben schon gesehen, dass die j -Invariante die folgende wichtige Eigenschaft besitzt: Zwei Gitter L_1, L_2 haben die gleiche Invariante,

$$j(L_1) = j(L_2)$$

genau dann, wenn L_1 und L_2 *ähnlich* sind, d.h. sich nur um einen komplexen Faktor unterscheiden:

$$L_1 = t \cdot L_2, \quad t \in \mathbb{C}^\times.$$

(Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn die Kurven \mathbb{C}/L_1 und \mathbb{C}/L_2 biholomorph sind.)

Zwei Gitter der Form

$$\mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \mathbb{Z}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$$

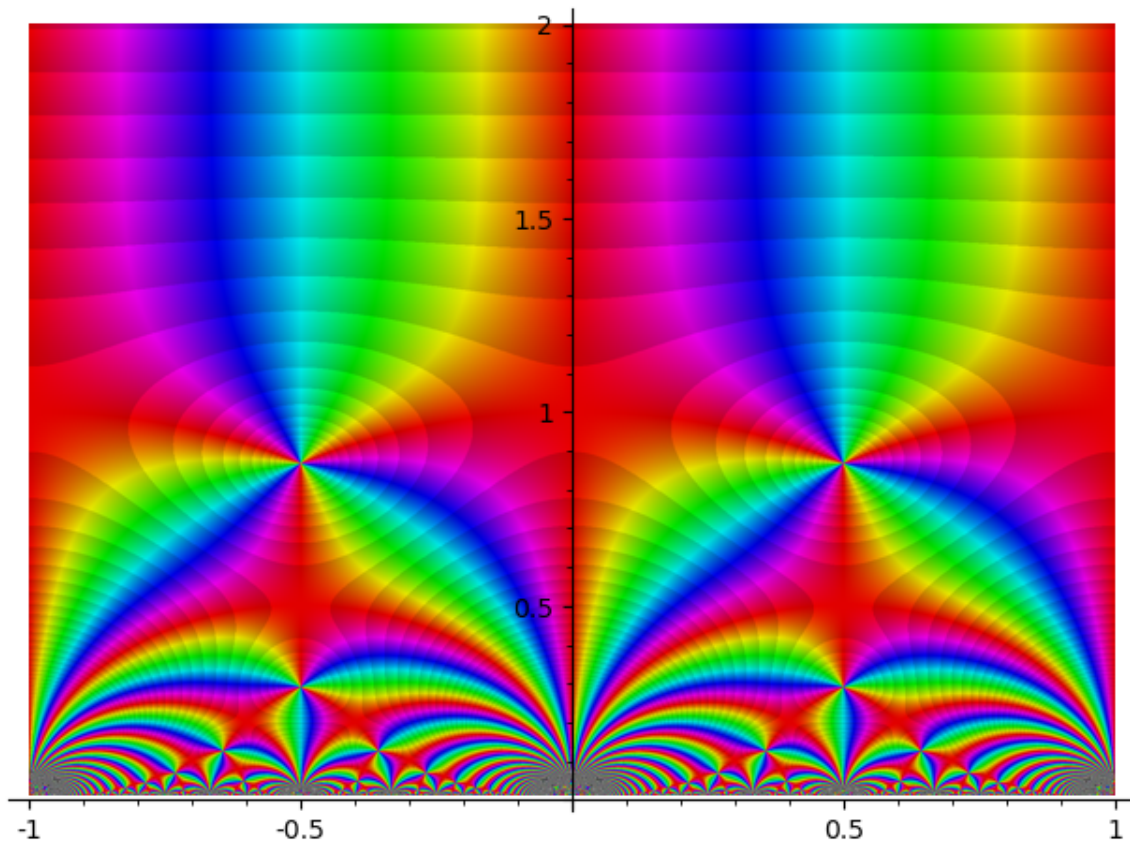
sind aber genau dann ähnlich, wenn sie übereinstimmen. Damit erhalten wir:

Satz 6.16. *Für Punkte $\tau, w \in \mathbb{H}$ sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $w = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$;*

(ii) $j(\tau) = j(w)$.

Durch Visualisierung der j -Invariante ist die Kachelung von \mathbb{H} durch den Standard-Fundamentbereich \mathcal{F} und seine Bilder unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu erkennen.



Figur 6.2: Die j -Invariante. Der Betrag $|j(\tau)|$ wird mit Höhenlinien angedeutet, und die Farbe entspricht dem komplexen Argument (rot = positiv reel; gelb = iy mit $y > 0$; hellblau = negativ reel; lila = iy mit $y < 0$).

6.4. Der Struktursatz

6.4.1. Nullstellen von E_4 und E_6

Proposition 6.17. *Sei f eine Modulform von Gewicht k .*

(i) *Falls k kein Vielfaches von 4 ist, dann gilt $f(i) = 0$.*

(ii) *Falls k kein Vielfaches von 6 ist, dann gilt $f(\rho) = 0$ mit der dritten Einheitswurzel $\rho = e^{2\pi i/3}$.*

Beweis. (i) Die Funktionalgleichung von f unter $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liefert

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau).$$

Da aber $-\frac{1}{i} = i$, erhalten wir an der Stelle $\tau = i$:

$$f(i) = i^k f(i),$$

daher $f(i) = 0$ falls $4 \nmid k$.

(ii) Man verwendet ein ähnliches Argument wie (i) mit der Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

die

$$U \cdot \rho = -\frac{1}{\rho+1} = \rho$$

erfüllt. Aus

$$f(\rho) = \rho^k f(\rho)$$

folgt $f(\rho) = 0$ falls $6 \nmid k$. □

Proposition 6.18. Die Eisensteinreihe E_6 besitzt nur einfache Nullstellen. Es gilt

$$E_6(\tau) = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{ai+b}{ci+d} \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Beweis. E_6 hat auf jeden Fall eine Nullstelle in $\tau = i$, weil das Gewicht 6 kein Vielfaches von 4 ist. Diese Nullstelle ist einfach, denn:

$$E'_6(\tau) = -504 \cdot 2\pi i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_5(n)e^{2\pi i n\tau}$$

und

$$\frac{E'_6(i)}{-504 \cdot 2\pi i} = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_5(n)e^{-2\pi n},$$

und die Reihe rechts enthält nur positive Terme.

Wir untersuchen die möglichen anderen Nullstellen. Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter, für das $E_6(L)$ bzw. $g_3(L)$ verschwindet. Dann hat die Weierstraß-Gleichung der \wp -Funktion zu L die Form

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) = 4\wp(z)(\wp(z) - \sqrt{g_2/4})(\wp(z) + \sqrt{g_2/4})$$

mit den Halbperioden-Werten

$$e_1 = 0, \quad e_2 = -\sqrt{g_2/4}, \quad e_3 = \sqrt{g_2/4}.$$

Das Doppelverhältnis (und damit die j -Invariante) hängt nicht von g_2 ab:

$$\lambda = [e_1, e_2; e_3, \infty] = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} = -1.$$

Nach Satz 5.32 sind alle solche Gitter Vielfache voneinander und damit Vielfache von $\mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}$:

$$L = \mathbb{Z}ti \oplus \mathbb{Z}t, \quad t \in \mathbb{C}^\times.$$

Falls $E_6(\tau) = 0$, so ist also

$$\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}ti \oplus \mathbb{Z}t$$

und damit $\tau = \frac{ai+b}{ci+d}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. □

Bemerkung 6.19. Die Eisensteinreihe E_4 hat einfache Nullstellen genau in den Punkten $M \cdot \rho$, $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\rho = e^{2\pi i/3}$. Das zeigt man mit einem ähnlichen Argument:

Wenn $E_4(\tau) = 0$, dann lautet die Weierstraß-Gleichung der \wp -Funktion zum Gitter $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_3 = 4\left(\wp(z) - \sqrt[3]{g_3/4}\right)\left(\wp(z) - e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{g_3/4}\right)\left(\wp(z) - e^{4\pi i/3}\sqrt[3]{g_3/4}\right).$$

Das Doppelverhältnis

$$\lambda = [\sqrt[3]{g_3/4}, e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{g_3/4}; e^{4\pi i/3}\sqrt[3]{g_3/4}, \infty] = -e^{2\pi i/3}$$

ist wieder unabhängig (von g_3) und das Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ ist eindeutig bestimmt.

6.4.2. Der Struktursatz

Erinnerung:

$$M_* := \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$$

ist der *graduierete Ring* von Modulformen von jedem Gewicht.

Satz 6.20. Für jedes k bilden die Monomen

$$E_4^a E_6^b, \quad 4a + 6b = k$$

eine Basis von M_k .

Mit anderen Worten: der Ring der Modulformen ist genau

$$M_* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k = \mathbb{C}[E_4, E_6] :$$

jede Modulform (von jedem Gewicht) hat eine eindeutige Darstellung $f = P(E_4, E_6)$ mit einem Polynom P .

Beweis. Wir haben uns schon überlegt, dass $E_6(i) = 0$ gilt. Andererseits ist $E_4(i) \neq 0$, weil jeder Term in der Reihe

$$E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{-2\pi n}$$

positiv ist. Da alle Monomen $E_4^a E_6^b$ verschiedene Ordnungen (b) in $\tau = i$ haben, müssen sie linear unabhängig sein.

Mit Induktion nach dem Gewicht k beweisen wir, dass diese Monome den Raum M_k wirklich aufspannen. Im Fall $k = 0$ besteht $M_k = \mathbb{C}$ aus den Konstanten. Angenommen, die Behauptung ist für jedes Gewicht kleiner als k wahr. Dann haben wir eine Fallunterscheidung:

(i) $4 \nmid k$. Dann verschwindet jede Modulform $f \in M_k$ im Punkt $\tau = i$, und der Quotient $\frac{f}{G_6}$ ist holomorph auf \mathbb{H} . Da $\lim_{y \rightarrow \infty} G_6(x + iy) \neq 0$, bleibt auch $\frac{f}{G_6}$ im Limes $y \rightarrow \infty$ beschränkt. Also gilt $\frac{f}{G_6} \in M_{k-6}$. Nach Induktionsannahme erhalten wir

$$f \in E_6 \cdot M_{k-6} = E_6 \cdot \bigoplus_{4a+6b=k-6} \mathbb{C} E_4^a E_6^b \subseteq \bigoplus_{4a+6b=k} \mathbb{C} E_4^a E_6^b.$$

(ii) $4|k$. Da $E_4(i) \neq 0$, finden wir eine Konstante C sodass die Modulform

$$g := f - C \cdot E_4^{k/4}$$

im Punkt $\tau = i$ verschwindet. Wie im Fall (i) erhalten wir

$$\frac{f - C \cdot E_4^{k/4}}{E_6} \in M_{k-4} = \bigoplus_{4a+6b=k-6} \mathbb{C} E_4^a E_6^b$$

und damit auch

$$f \in \bigoplus_{4a+6b=k} E_4^a E_6^b. \quad \square$$

Korollar 6.21. Die Räume M_k sind endlich-dimensional. Für gerade Zahlen $k \geq 0$ ist

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor + 1 & : k \not\equiv 2 \pmod{12}; \\ \lfloor k/12 \rfloor & : k \equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Beweis. $\dim M_k$ ist die Anzahl der Monomen $E_4^a E_6^b$, die in M_k liegen; mit anderen Worten, $\dim M_k$ ist die Anzahl der Lösungen

$$k = 4a + 6b$$

mit $a, b \in \mathbb{N}_0$. Diese Anzahl kann man auf mehrere Weisen berechnen. □

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$\dim M_k$	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2
k	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
$\dim M_k$	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3

Figur 6.3: $\dim M_k$

Für genau 6 Werte von k ist der Raum M_k eindimensional: $k \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$. In den fünf Fällen mit $k \neq 0$ besteht M_k genau aus den Vielfachen der Eisensteinreihe E_k . Das führt zu einigen überraschenden Identitäten zwischen den Teilersummen $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$:

Korollar 6.22. *Es gelten die Identitäten*

$$\begin{aligned} \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n\right)^2 &= E_4^2 = E_8 = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n; \\ \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n\right) \left(1 - 540 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n\right) &= E_4 E_6 = E_{10} = 1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n)q^n; \\ \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n\right) \left(1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n\right) &= E_6 E_8 = E_{14} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{13}(n)q^n; \\ \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n\right) \left(1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n)q^n\right) &= E_4 E_{10} = E_{14} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{13}(n)q^n. \end{aligned}$$

Schreibt man das Cauchy-Produkt aus, so ist die erste Identität äquivalent zu einer Formel von Hurwitz:

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{\substack{n=a+b \\ a,b \in \mathbb{N}}} \sigma_3(a)\sigma_3(b).$$

Zum Beispiel sind

$$1 + 2^7 = (1 + 2^3) + 120$$

und

$$1 + 3^7 = (1 + 3^3) + 120 \cdot \left(1 \cdot (1 + 2^3) + (1 + 2^3) \cdot 1\right).$$

Die anderen Gleichungen sind natürlich genauso interessant.

Beweis. Im Fall (i) ist E_4^2 Modulform von Gewicht 8, also ein Vielfaches von E_8 . Da die konstanten Terme in den jeweiligen Fourier-Entwicklungen übereinstimmen, gilt schon $E_4^2 = E_8$. Die anderen Beispiele behandelt man genauso. \square

6.4.3. Die Valenzformel

Die *Valenzformel* gibt an, wie viele Nullstellen eine (meromorphe) Modulform von Gewicht k modulo der Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ besitzt.

Wenn die meromorphe Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

genügt und Ordnung n im Punkt $\tau = w$ hat, dann hat f auch Ordnung n im Punkt $\tau = M \cdot w$ mit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, denn:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow M \cdot w} (\tau - M \cdot w)^{-n} f(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow w} (M \cdot \tau - M \cdot w)^{-n} f(M \cdot \tau) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow w} (c\tau + d)^{-k} \left(\frac{M \cdot \tau - M \cdot w}{\tau - w} \right)^{-n} (\tau - w)^{-n} f(\tau) \\ &= (c \cdot w + d)^{-k-2} \cdot \lim_{\tau \rightarrow w} (\tau - w)^{-n} f(\tau); \end{aligned}$$

d.h. der erste Limes existiert und ist nicht 0 genau dann, wenn das für den zweiten Limes gilt.

Damit ist der Begriff

$$\mathrm{ord}_{[w]}(f), \quad [w] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$$

wohldefiniert.

Die *Ordnung von f in ∞* definieren wir dagegen als Ordnung $-N$ der Fourier-Reihe $\sum_{n \geq -N} a_n q^n$ in $q = 0$. Zum Beispiel ist $\mathrm{ord}_{\infty}(\Delta) = 1$ aber $\mathrm{ord}_{\infty}(j) = -1$.

Lemma 6.23. *Die Ableitung der j -Invariante ist*

$$j' = -2\pi i \frac{E_4^2 E_6}{\Delta}.$$

Insbesondere besitzt j' nur doppelte Nullstellen in den Punkten $\tau \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \rho$, $\rho = e^{2\pi i/3}$ und einfache Nullstellen in den Punkten $\tau \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot i$.

Beweis. Wir leiten die Gleichung

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau)$$

ab und erhalten mit der Kettenregel:

$$(c\tau + d)^{-2} j' \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = j'(\tau),$$

d.h. j' ist schwache Modulform von Gewicht 2. Dann ist $\Delta \cdot j'$ eine Modulform von Gewicht 14. Mit

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots = e^{-2\pi i\tau} + 744 + 196884e^{2\pi i\tau} + \dots$$

beginnt die Fourier-Entwicklung von j'

$$j'(\tau) = -2\pi i e^{-2\pi i\tau} + 196884 \cdot 2\pi i e^{2\pi i\tau} + \dots = -2\pi i (q^{-1} - 196884q - \dots),$$

also

$$\frac{\Delta \cdot j'}{-2\pi i} = (q - 24q^2 \pm \dots) (q^{-1} - 196884q - \dots) = 1 - 24q - \dots$$

Da der Raum M_{14} der Modulformen von Gewicht 14 eindimensional ist, muss das Ergebnis schon die Eisensteinreihe E_{14} bzw. das Produkt $E_4^2 E_6$ sein. \square

Für die j -Invariante wissen wir bereits, dass

$$j(\tau) = j(w) \text{ genau dann wenn } \tau \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot w;$$

d.h. als Funktion von τ besitzt $j(\tau) - j(w)$ nur eine einzige Bahn von Nullstellen in $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. Anhand der Nullstellen von j' sieht man, dass diese Nullstellen im Fall $[w] \neq [\rho]$ und $[w] \neq [i]$ immer einfach sind.

Satz 6.24 (Valenzformel). Für jede meromorphe Modulform f von Gewicht k gilt

$$\text{ord}_\infty(f) + \frac{\text{ord}_i(f)}{2} + \frac{\text{ord}_\rho(f)}{3} + \sum_{\substack{[w] \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \\ [w] \neq [\infty], [i], [\rho]}} \text{ord}_w(f) = \frac{k}{12}.$$

Beweis. Sei f eine meromorphe Modulform von Gewicht k mit Ordnungen $m_\infty, m_i, m_\rho, m_w \in \mathbb{Z}$ für $[w] \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ in den Punkten ∞, i, ρ bzw. $w \in \mathbb{H}$.

Zuerst beachten wir, dass f nur endlich viele Null- oder Polstellen modulo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ besitzt, denn: die Fourier-Reihe von f definiert eine meromorphe Funktion

$$q \mapsto \sum_{n \geq -N}^{\infty} a_n q^n$$

in der Einheitskreisscheibe $|q| < 1$. Für jede Null- oder Polstelle $\tau \in \overline{\mathcal{F}} \cup \{\infty\}$ ist $q = e^{2\pi i\tau}$ eine Null- oder Polstelle der Fourier-Reihe von f , die im Kompaktum

$$|q| = e^{-2\pi y} \leq e^{-2\pi(\sqrt{3}/2)}$$

liegt, und davon kann es nur endlich viele geben.

Wir können eine meromorphe Modulform g mit genau diesen Null- bzw. Polstellen direkt konstruieren:

$$\text{ord}_g(\infty) = m_\infty, \text{ord}_i(g) = m_i, \text{ord}_\rho(g) = m_\rho, \text{ord}_w(g) = m_w,$$

und zwar als Produkt

$$g := \Delta^{m_\infty} \cdot E_6^{m_i} \cdot E_4^{m_\rho} \cdot \prod_{\substack{[w] \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ [w] \neq [\infty], [i], [\rho]}} \left[\Delta(\tau)(j(\tau) - j(w)) \right]^{m_w}.$$

Dabei hat g Gewicht

$$k = 12m_\infty + 6m_i + 4m_\rho + 12 \sum_{\substack{[w] \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ [w] \neq [\infty], [i], [\rho]}} m_w.$$

Dann sind (f/g) und (g/f) beide holomorphe Modulformen und müssen Gewicht 0 haben (sonst wäre das Gewicht von einer von f/g oder g/f negativ). Das Gewicht von f ist also auch

$$12 \cdot \left(\text{ord}_\infty(f) + \frac{\text{ord}_i(f)}{2} + \frac{\text{ord}_\rho(f)}{3} + \sum_{\substack{[w] \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H} \\ [w] \neq [\infty], [i], [\rho]}} \text{ord}_w(f) \right). \quad \square$$

6.5. Die Lambda-Funktion

6.5.1. Die Weierstraß'schen Halbperioden-Werte

Die Werte e_1, e_2, e_3 der \wp -Funktion zu L in den Halbperioden sind *keine* Gitterfunktionen, weil sie von der Wahl einer Basis von L abhängen. Durch eine Basiswechsel von L werden e_1, e_2, e_3 jedoch schlimmstenfalls permutiert. Wir fixieren von jetzt an immer das Gitter

$$L = L_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau, \quad \tau \in \mathbb{H}$$

mit \wp -Funktion

$$\wp(\tau, z), \quad \tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C}, z \notin L_\tau,$$

und definieren die Halbperioden-Werte

$$e_1 = \wp(\tau, 1/2), \quad e_2 = \wp(\tau, \tau/2), \quad e_3 = \wp(\tau, 1/2 + \tau/2).$$

Proposition 6.25. *Unter den Erzeugern*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben e_1, e_2, e_3 das Transformationsverhalten

$$e_1 \Big|_2 S = e_2, \quad e_2 \Big|_2 S = e_1, \quad e_3 \Big|_2 S = e_3$$

und

$$e_1 \Big|_2 T = e_1, \quad e_2 \Big|_2 T = e_3, \quad e_3 \Big|_2 T = e_2.$$

Für jede Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es also eine Permutation $\sigma = \sigma_M$ mit

$$e_i \Big|_2 M = e_{\sigma_M(i)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Abbildung $M \mapsto \sigma_M$ definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow S_3.$$

Wenn man allgemein ein Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ betrachtet und eine Basiswechsel der Form

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2, \quad \omega'_3 = \omega'_1 + \omega'_2 = (a+c)\omega_1 + (b+d)\omega_2$$

verwendet, dann kommen unter ω'_i der folgenden Fälle jeweils genau einmal vor:

$$\omega'_i = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha \text{ ungerade, } \beta \text{ gerade;} \\ \alpha \text{ gerade, } \beta \text{ ungerade;} \\ \alpha \text{ ungerade, } \beta \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Wert von \wp an $\omega'_i/2$ ist jeweils e_1, e_2, e_3 . Mit anderen Worten: Γ besteht genau aus den Matrizen, die die *Parität* aller Vektoren in \mathbb{Z}^2 respektieren:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : Mv \equiv v \pmod{2} \text{ für alle } v \in \mathbb{Z}^2 \right\} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \text{ gerade, } b, c \text{ ungerade} \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Mit der allgemeinen Transformationsformel

$$\wp\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 \wp(\tau, z)$$

erhält man

$$e_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \wp\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\tau/2}{\tau}\right) = \tau^2 \wp\left(\tau, \frac{\tau}{2}\right) = \tau^2 e_2(\tau)$$

$$e_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \wp\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-1/2}{\tau}\right) = \tau^2 \wp\left(\tau, -\frac{1}{2}\right) = \tau^2 e_1(\tau)$$

$$e_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \wp\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-1/2 + \tau/2}{\tau}\right) = \tau^2 \wp\left(\tau, -\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \tau^2 e_3(\tau)$$

sowie

$$e_1(\tau + 1) = \wp\left(\tau + 1, \frac{1}{2}\right) = \wp\left(\tau, \frac{1}{2}\right) = e_1(\tau)$$

$$e_2(\tau + 1) = \wp\left(\tau + 1, \frac{\tau + 1}{2}\right) = \wp\left(\tau, \frac{\tau + 1}{2}\right) = e_3(\tau)$$

$$e_3(\tau + 1) = \wp\left(\tau + 1, \frac{1}{2} + \frac{\tau + 1}{2}\right) = \wp\left(\tau, \frac{\tau}{2}\right) = e_2(\tau). \quad \square$$

Proposition 6.26. Die Fourier-Entwicklungen von e_1, e_2, e_3 lauten

$$e_1(\tau) = \frac{2}{3}\pi^2 \cdot \left[1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d \right) q^n \right];$$

$$e_2(\tau) = -\frac{1}{3}\pi^2 \cdot \left[1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d \right) q^{n/2} \right];$$

$$e_3(\tau) = -\frac{1}{3}\pi^2 \cdot \left[1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d \right) q^{n/2} \right].$$

Also:

$$e_1(\tau) = \frac{2}{3}\pi^2 \cdot \left(1 + 24q + 24q^2 + 96q^3 + 24q^4 + 144q^5 + \dots\right)$$

$$e_2(\tau) = -\frac{1}{3}\pi^2 \cdot \left(1 + 24q^{1/2} + 24q + 96q^{3/2} + 24q^2 + 144q^{5/2} + \dots\right)$$

$$e_3(\tau) = -\frac{1}{3}\pi^2 \cdot \left(1 - 24q^{1/2} + 24q - 96q^{3/2} + 24q^2 - 144q^{5/2} \pm \dots\right)$$

mit $q = e^{2\pi i\tau}$.

N.B. Aus der Gleichung

$$4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) = 4X^3 - g_2X - g_3$$

erhält man die Identitäten

$$e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{1}{4}g_2 = -\frac{\pi^4}{3} \cdot E_4$$

und

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3 = \frac{2\pi^6}{27} \cdot E_6.$$

Die Identitäten, die dadurch für die Fourier-Koeffizienten von e_1, e_2, e_3 und E_4, E_6 impliziert werden, sind alles andere als offensichtlich.

Beweis. Man erinnere sich an die Identität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau + n)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{2\pi in\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

der Spezialfall $k = 2$ von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau + n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi in\tau},$$

vgl. Beweis von Prop. 6.11. Mit

$$\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left(\frac{1}{(m\tau + n + z)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right)$$

erhalten wir an der Stelle $z = \tau/2$:

$$\begin{aligned} e_2(\tau) &= \frac{1}{(0 + \tau/2)^2} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left(\frac{1}{(m\tau + n + \tau/2)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right) \\ &= -\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + \tau/2)^2} + \sum_{m \neq 0} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n + \tau/2)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{2\pi in(m-1/2)\tau} - \sum_{n=1}^{\infty} ne^{2\pi inm\tau} \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{3} \left[1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ unger.}}} d \right) e^{2\pi i(n/2)\tau} \right]. \end{aligned}$$

(Im letzten Schritt verwendet man eine Fallunterscheidung zwischen n gerade und n ungerade.) Die anderen zwei Halbperioden-Werte ergeben sich aus

$$e_3(\tau) = e_2(\tau + 1)$$

und

$$e_1(\tau) + e_2(\tau) + e_3(\tau) = 0. \quad \square$$

6.5.2. Die Lambda-Funktion

Definition 6.27. Die **modulare Lambda-Funktion** $\lambda(\tau)$ ist der Quotient

$$\lambda(\tau) = \frac{e_3(\tau) - e_2(\tau)}{e_1(\tau) - e_2(\tau)}.$$

Nach Einsetzen der Fourier-Entwicklungen erhält man

$$\lambda(\tau) = 16q^{1/2} - 128q + 704q^{3/2} - 3072q^2 + 11488q^{5/2} - 38400q^3 \pm \dots$$

Für eine geeignete Permutation ist λ das Doppelverhältnis von $e_1(\tau), e_2(\tau), e_3(\tau)$ und ∞ . Da e_1, e_2, e_3 für jeden Wert von τ paarweise verschieden sind, kann λ auf \mathbb{H} nie die Werte $\infty, 0$ oder 1 annehmen. Umgekehrt können wir für jeden Wert $C \notin \{\infty, 0, 1\}$ das Periodengitter

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2, \quad \text{Im}[\omega_2/\omega_1] > 0$$

des Integrals $\int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-C)}}$ betrachten; für eine geeignete Wahl von Gitterbasis ω_1, ω_2 gilt dann $\lambda(\omega_2/\omega_1) = C$.

Die j -Invariante ergibt sich aus der λ -Funktion durch die im Abschnitt 5.5 gegebene Formel

$$j(\tau) = 256 \cdot \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}.$$

Insbesondere gilt auch

$$\lambda(\tau) = \lambda(w) \implies \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}w$$

(aber die Umkehrrichtung \Leftarrow für λ ist falsch!).

Proposition 6.28. Für $\lambda(\tau)$ gelten die Funktionalgleichungen

$$\lambda(-1/\tau) = 1 - \lambda(\tau) \quad \text{und} \quad \lambda(\tau + 1) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1}.$$

Beweis. Wir setzen

$$e_1(-1/\tau) = \tau^2 e_2(\tau), \quad e_2(-1/\tau) = \tau^2 e_1(\tau), \quad e_3(-1/\tau) = \tau^2 e_3(\tau)$$

und

$$e_1(\tau + 1) = e_1(\tau), \quad e_2(\tau + 1) = e_3(\tau), \quad e_3(\tau + 1) = e_2(\tau)$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda(-1/\tau) &= \frac{\tau^2 e_3(\tau) - \tau^2 e_1(\tau)}{\tau^2 e_2(\tau) - \tau^2 e_1(\tau)} \\ &= \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} \\ &= \frac{e_3 - e_2}{e_2 - e_1} + 1 \\ &= 1 - \lambda(\tau) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lambda(\tau + 1) &= \frac{e_2(\tau) - e_3(\tau)}{e_1(\tau) - e_3(\tau)} \\ &= 1 + \frac{e_2 - e_1}{e_1 - e_3} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} - 1} \\ &= \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 6.29. Die λ -Funktion definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow G, \quad M \mapsto \lambda(M \cdot \tau)$$

in die anharmonische Gruppe

$$G = \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}.$$

Der Kern ist

$$\Gamma = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \lambda(M \cdot \tau) = \lambda(\tau)\} = \left\{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

und es gilt

$$\lambda(\tau) = \lambda(w) \quad \Leftrightarrow \quad \tau = M \cdot w \text{ f\"ur ein } M \in \Gamma.$$

6.5.3. Der Satz von Picard

Sei $\Gamma = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \lambda(M \cdot \tau) = \lambda(\tau)\}$. Als Kern von einem surjektiven Gruppenhomomorphismus ist Γ eine normale Untergruppe von Index 6 in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 6.30. *Die Ableitung der Lambda-Funktion verschwindet nirgendwo:*

$$\lambda'(\tau) \neq 0, \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Im Beweis zeigen wir, dass es eine Konstante C gibt, sodass die Diskriminante als

$$\Delta = C \cdot \frac{(\lambda')^6}{\lambda^4(1-\lambda)^4}$$

geschrieben werden kann. Mit Δ ist dann λ' auch nullstellenfrei.

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ beliebig. Für jedes

$$f = f(\lambda) \in G = \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\}$$

existiert ein $g \in G$ sodass

$$f\left(\lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)\right) = g(\lambda(\tau)).$$

Wir bilden die Ableitung auf beiden Seiten und erhalten

$$\frac{\lambda'(\tau)}{(c\tau + d)^2} \cdot f'\left(\lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)\right) = \lambda'(\tau)g'(\lambda(\tau)).$$

Insbesondere transformiert das Produkt über alle Ableitungen,

$$\begin{aligned} h(\tau) &:= \prod_{f \in G} \frac{d}{d\tau} \left(f(\lambda(\tau)) \right) \\ &= -\frac{\lambda'(\tau)^6}{\lambda(\tau)^4(1-\lambda(\tau))^4}, \end{aligned}$$

wie eine Modulform von Gewicht 12 für die volle Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Mit

$$\lambda(\tau) = 16q^{1/2} - 128q \pm \dots = 16e^{\pi i \tau} - 128e^{2\pi i \tau} \pm \dots$$

ist

$$\lambda'(\tau) = 16\pi i q^{1/2} - 256\pi i q \pm \dots = 16\pi i e^{\pi i \tau} - 256e^{2\pi i \tau} \pm \dots$$

und damit

$$h(\tau) = -\frac{(16\pi i q^{1/2} \pm \dots)^6}{(16q^{1/2} \pm \dots)^4(1 \pm \dots)^4} = -\frac{(16\pi i)^6}{16^4} q \pm \dots = 256\pi^6 q \pm \dots$$

Also ist h sogar Spitzenform. Als Spitzenform von Gewicht 12 muss h ein Vielfaches von Δ sein und anhand der Fourier-Reihe ist ersichtlich, dass der Vorfaktor $256\pi^6$ ist. Insbesondere gilt

$$-\frac{\lambda'(\tau)^6}{\lambda(\tau)^4(1-\lambda(\tau))^4} = (256\pi^6) \cdot \Delta(\tau).$$

Da Δ nullstellenfrei ist, kann auch $\lambda'(\tau)$ keine Nullstelle haben. □

Mit anderen Worten: die Abbildung

$$\lambda : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

ist *konform*, d.h. zu jedem Punkt $\tau \in \mathbb{H}$ existiert eine offene Umgebung U , auf der $\lambda : U \rightarrow \lambda(U)$ ein Biholomorphismus auf ihr Bild ist. Außerdem ist λ surjektiv.

In der Topologie ist eine **Überlagerung** eine stetige, surjektive Abbildung

$$p : X \longrightarrow Y,$$

für die es eine offene Überdeckung

$$Y = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und eine Menge A derart gibt, dass jedes Urbild $p^{-1}(U_i)$ als disjunkte Vereinigung

$$p^{-1}(U_i) = \bigcup_{a \in A} V_{i,a}$$

zerfällt, mit offenen Teilmengen $V_{i,a} \subseteq X$, für die

$$p|_{V_{i,a}} \xrightarrow{\sim} U_i$$

ein Homöomorphismus ist (stetig und bijektiv mit stetiger Inverse). Die Kardinalität $|A|$ von jedem Faser $p^{-1}(\{y\})$ heißt **Grad** der Überlagerung.

Zum Beispiel sind die Abbildungen

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

holomorphe Überlagerungen von Grad n . Die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto e^z$$

ist eine holomorphe Überlagerung mit Indexmenge $A = \mathbb{Z}$: jeder Faser besitzt die Form

$$p^{-1}(\{z\}) = \{\text{Log}(z) + 2\pi in : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Die λ -Funktion definiert insbesondere eine holomorphe Überlagerung

$$\lambda : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Wir brauchen (ohne Beweis) einen Spezialfall der wichtigen *Liftungs-Eigenschaft* von Überlagerungen:

Proposition 6.31. *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ offen und*

$$p : X \longrightarrow Y$$

eine holomorphe Überlagerung. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : U \rightarrow Y$ eine holomorphe Funktion. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow X$ mit

$$f = p \circ F.$$

N.B. einen direkteren Beweis bekommt man aus dem Monodromiesatz: man konstruiert F durch analytische Fortsetzung entlang beliebigen Kurven in U .

Für die Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ist das die folgende bekannte Aussage: Für ein Elementargebiet U besitzt jede nullstellenfreie holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einen Logarithmus, d.h. eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \exp\left(F(z)\right).$$

Wir schauen uns den Fall $U = \mathbb{C}$ an. Man kann leicht zeigen, dass es keine nichtkonstante holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ geben kann. (Denn $\frac{1}{F(z)+i}$ wäre z.B. eine betragsmäßig durch 1 beschränkte ganze Funktion.) Zusammen mit der Liftungs-Eigenschaft der Überlagerung $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ erhält man den überraschenden

Satz 6.32 (Kleiner Satz von Picard). *Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meromorphe, nichtkonstante Funktion. Dann enthält das Bild $f(\mathbb{C})$ die gesamte Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen.*

Im Bild einer nichtkonstanten ganzen Funktion ist also jede komplexe Zahl **mit höchstens einer Ausnahme** enthalten. (Der Punkt ∞ auf der Zahlenkugel zählt bereits als die andere Ausnahme.)

N.B. Meromorphe Funktionen können tatsächlich zwei unterschiedliche Werte verpassen. Die komplexe Tangens-Funktion ist ein Beispiel: weder $\tan(z) = +i$ noch $\tan(z) = -i$ besitzt eine komplexe Lösung $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen, $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ist eine meromorphe Funktion und $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ sind drei Punkte, die nicht im Bild $f(\mathbb{C})$ liegen. Sei φ eine Möbius-Transformation, die

$$a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1$$

abbildet. Wir ersetzen f durch $\tilde{f} := \varphi \circ f$ und erhalten eine ganze Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt, d.h. eine holomorphe Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Wegen der Überlagerung-Eigenschaft von λ erhalten wir eine ganze Funktion

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$$

mit $\tilde{f} = \lambda \circ F$. Aber dann muss F und damit f konstant sein. □

6.6. Thetafunktionen

Die *Theta-Reihe* ist die Reihe

$$\theta(\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2}.$$

Oft ist es hilfreich, $\theta(\tau)$ als der *Theta-Nullwert* $z = 0$ der allgemeineren Theta-Reihe

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} \zeta^n$$

in den Variablen $q = e^{2\pi i \tau}$ und $\zeta = e^{2\pi i z}$ anzusehen.

6.6.1. Theta-Transformationsformel

Der typische Beweis für die Transformationsregel von $\theta(\tau)$ unter $\tau \mapsto -1/\tau$ beruht auf der Poissonschen Summenformel und insbesondere der Tatsache, dass

$$n \mapsto e^{\pi i n^2 (-1/\tau)}$$

im Wesentlichen die Fourier-Transformierte von

$$n \mapsto e^{\pi i n^2 \tau}$$

ist.

Für geeignete (d.h. im Limes $x \rightarrow \pm\infty$ schnell abklingende) Funktionen h kann man periodische Funktionen durch

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(x + n), \quad x \in \mathbb{R}$$

konstruieren. Solange das Vertauschen von Reihe und Integral gerechtfertigt werden kann, berechnet man die Fourier-Koeffizienten in

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i m x}$$

durch Integrieren:

$$\begin{aligned}
 a_m &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi imx} dx \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 h(x+n)e^{-2\pi imx} dx \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} h(x)e^{2\pi imn} e^{-2\pi imx} dx \quad (x \mapsto x-n) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi imx} dx,
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) &= f(0) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{h}(m), \quad \hat{h}(m) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi imx} dx.
 \end{aligned}$$

Das werden wir jetzt auf die Funktion

$$\theta(iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 y}$$

anwenden. Für die Funktion h wählen wir

$$h(x) = e^{-\pi x^2 y} \cdot e^{2\pi i x z}, \quad y > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Die Umformungen oben sind für dieses h erlaubt, und wir erhalten:

Proposition 6.33 (Theta-Transformationsformel). Für $\tau \in \mathbb{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\theta\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = e^{-\pi i/4} \times \sqrt{\tau} e^{\pi i z^2 / \tau} \cdot \theta(\tau, z).$$

Hier ist $\sqrt{\tau}$ der Zweig, der im Limes $\tau \rightarrow x > 0$ positiv wird.

Beweis. Es genügt, die Identität für $\tau = iy$ zu beweisen: wenn uns das gelingt, dann sind für jedes fest gewählte z die linke und rechte Seite holomorphe Funktionen von $\tau \in \mathbb{H}$, die auf $i \cdot \mathbb{R}_{>0}$ übereinstimmen, und die Behauptung folgt aus dem Identitätssatz.

Für $\tau = iy$ lautet die Behauptung

$$\theta\left(\frac{i}{y}, \frac{-iz}{y}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 / y + 2\pi m z / y} = \sqrt{y} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 y - 2\pi n z} = \sqrt{y} \cdot \theta(iy, z).$$

Wie oben angedeutet sei $h(x) = e^{-\pi x^2 y} \cdot e^{2\pi i x z}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\hat{h}(m) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(yx^2 + 2imx - 2izx)} dx \\ &= e^{-\pi(m-z)^2/y} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y(x + im/y - iz/y)^2} dx.\end{aligned}$$

Das Integral kann man als Spezialfall $a = i(m + z)/y$ des Integrals

$$f(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y(x+a)^2} dx.$$

Bei diesem Integral handelt es sich um eine ganze Funktion der Variablen a , die auf \mathbb{R} konstant ist (für $a \in \mathbb{R}$ substituiert man einfach $x \mapsto x - a$) und damit auf ganz \mathbb{C} konstant ist. Für $a = 0$ haben wir das bekannte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Also ist

$$\hat{h}(m) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\pi(m-z)^2/y} = \frac{1}{\sqrt{y} e^{-\pi z^2/y}} e^{-\pi m^2/y + 2\pi m z/y}$$

und

$$\begin{aligned}\theta(iy, z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{h}(m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y} e^{-\pi z^2/y}} \cdot \theta\left(\frac{i}{y}, \frac{-iz}{y}\right).\end{aligned}$$

□

Korollar 6.34. Für die *Thetanullwerte*²

$$\begin{aligned}\theta_1(\tau) &= \theta(\tau, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2}, \\ \theta_2(\tau) &= \theta(\tau, 1/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2}, \\ \theta_3(\tau) &= e^{\pi i \tau/4} \theta(\tau, \tau/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(2n+1)^2/8}\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\theta_1(-1/\tau) &= e^{-\pi i/4} \sqrt{\tau} \cdot \theta_1(\tau) \\ \theta_2(-1/\tau) &= e^{-\pi i/4} \sqrt{\tau} \cdot \theta_3(\tau) \\ \theta_3(-1/\tau) &= e^{-\pi i/4} \sqrt{\tau} \cdot \theta_2(\tau)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\theta_1(\tau + 1) &= \theta_2(\tau) \\ \theta_2(\tau + 1) &= \theta_1(\tau) \\ \theta_3(\tau + 1) &= e^{\pi i/4} \cdot \theta_3(\tau).\end{aligned}$$

Beweis. Die Transformationen unter $\tau \mapsto -1/\tau$ sind Spezialfälle der Theta-Transformationsformel

$$\theta\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = e^{-\pi i/4} \sqrt{\tau} e^{\pi i z^2/\tau} \cdot \theta(\tau, z).$$

Die Transformationen unter $\tau \mapsto \tau + 1$ kann man direkt ablesen. □

6.6.2. Der Vier-Quadrate-Satz

Unser Ziel ist jetzt, geeignete Ausdrücke in $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit Modulformen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu identifizieren. Das führt zu interessanten Identitäten zwischen Fourier-Reihen.

Lemma 6.35. Die modulare Diskriminante hat die Darstellung

$$\Delta = \left(\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{2}\right)^8.$$

Beweis. Durch das Bilden der 8-ten Potenzen verschwindet der Vorfaktor $e^{-\pi i/4}$ in der Theta-Transformationsformel:

$$\theta_1^8 \Big|_4 S = \theta_1, \quad \theta_2^8 \Big|_4 S = \theta_3, \quad \theta_3^8 \Big|_4 S = \theta_2$$

²Für Theta-Funktionen gibt es viele Notationskonventionen. Die Bezeichnungen $\theta_{00} = \theta_1, \theta_{01} = \theta_2, \theta_{10} = \theta_3$ sind üblich.

und

$$\theta_1^8 \Big|_4 T = \theta_2^8, \quad \theta_2^8 \Big|_4 T = \theta_1, \quad \theta_3^8 \Big|_4 T = \theta_3.$$

Darum ist das Produkt $\theta_1^8 \theta_2^8 \theta_3^8$ eine wohldefinierte Modulform von Gewicht 12. Da

$$\theta_1^8 \theta_2^8 \theta_3^8 = \left(1 + 2q^{1/2} + \dots\right)^8 \left(1 - 2q^{1/2} \pm \dots\right)^8 \left(2q^{1/8} + 2q^{9/8} + \dots\right)^8 = 2^8 q \pm \dots,$$

ist $(\theta_1 \theta_2 \theta_3)^8$ sogar Spitzenform mit führendem Fourier-Koeffizienten 2^8 , also genau $2^8 \cdot \Delta$. \square

Korollar 6.36. *Alle Fourier-Koeffizienten von Δ sind ganze Zahlen.*

Denn alle Fourier-Koeffizienten von

$$\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{2} = \left(1 + 2q^{1/2} + 2q^2 + 2q^{9/2} + \dots\right) \left(1 - 2q^{1/2} + 2q^2 - 2q^{9/2} \pm \dots\right) \left(q^{1/8} + q^{9/8} + q^{25/8} + \dots\right)$$

sind ganze Zahlen. Damit sind auch alle Koeffizienten der 8ten Potenz dieser Reihe ganz.

Andererseits ist nach Definition:

$$\Delta = \frac{16}{(2\pi)^{12}} \cdot \left((e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2\right).$$

Das legt nahe, dass die achten Potenzen θ_i^8 bis auf Konstante gleich den Ausdrücken $(e_j - e_k)^2$ sein könnten, für eine geeignete Wahl von i, j, k . Zum Beweis rechnen wir zuerst andere symmetrische Ausdrücke in den θ_i^8 aus:

Lemma 6.37. (i) *Es gilt*

$$\theta_1^8 + \theta_2^8 + \theta_3^8 = 2E_4.$$

(ii) *Es gilt*

$$(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2 = 2\pi^4 \cdot E_4.$$

(iii) *Es gilt*

$$\theta_1^8 \theta_2^8 + \theta_1^8 \theta_3^8 + \theta_2^8 \theta_3^8 = E_8.$$

(iv) *Es gilt*

$$(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 + (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 + (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 = \pi^8 \cdot E_8.$$

Beweis. Die linken Seiten von (i) und (ii) sind Modulformen von Gewicht 4 und damit Vielfache von E_4 . Das genaue Vielfache berechnet man jeweils mit den führenden Fourier-Koeffizienten:

$$\theta_1^8 = 1 + \dots, \quad \theta_2^8 = 1 + \dots, \quad \theta_3^8 = 0 + \dots$$

und

$$(e_1 - e_2)^2 = \pi^4 + \dots, \quad (e_1 - e_3)^2 = \pi^4 + \dots, \quad (e_2 - e_3)^2 = 0 + \dots$$

(iii) und (iv) beweist man auf ähnlicher Weise, denn es handelt sich hier um Modulformen von Gewicht 8 und damit um Vielfachen von E_8 . \square

Korollar 6.38. *Es gilt die folgende Identität von Polynomen:*

$$\begin{aligned} & (X - \theta_1^8)(X - \theta_2^8)(X - \theta_3^8) \\ &= X^3 - 2E_4X^2 + E_8X - 256\Delta \\ &= \left(X - \frac{(e_1 - e_2)^2}{\pi^4}\right) \left(X - \frac{(e_1 - e_3)^2}{\pi^4}\right) \left(X - \frac{(e_2 - e_3)^2}{\pi^4}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten den wichtigen

Satz 6.39. *Zwischen den Halbperioden-Werten von \wp und den Thetanullwerten gelten die folgenden Identitäten:*

$$e_1 - e_2 = \pi^2 \cdot \theta_1^4, \quad e_1 - e_3 = \pi^2 \cdot \theta_2^4, \quad e_3 - e_2 = \pi^2 \cdot \theta_3^4.$$

Beweis. Sowohl $(\frac{e_i - e_j}{\pi^2})^2$ als auch θ_k^8 sind holomorphe Funktionen f auf \mathbb{H} , die die Gleichung

$$f^3 - 2E_4 \cdot f^2 + E_8 \cdot f - 256\Delta = 0$$

genügen. Damit stimmen die Mengen $\theta_1^8, \theta_2^8, \theta_3^8$ und $\frac{(e_1 - e_2)^2}{\pi^4}, \frac{(e_1 - e_3)^2}{\pi^4}, \frac{(e_2 - e_3)^2}{\pi^4}$ überein. Wir identifizieren die Funktionen und die korrekten Vorzeichen ± 1 durch Vergleichen der Fourierentwicklungen:

$$\begin{aligned} \theta_1^4 &= 1 + 8q^{1/2} + 24q + \dots, & e_1 - e_2 &= \pi^2(1 + 8q^{1/2} + 24q + \dots) \\ \theta_2^4 &= 1 - 8q^{1/2} + 24q \pm \dots, & e_1 - e_3 &= \pi^2(1 - 8q^{1/2} + 24q \pm \dots) \\ \theta_3^4 &= 16q^{1/2} \pm \dots, & e_3 - e_2 &= \pi^2 \cdot (16q^{1/2} \pm \dots) \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 6.40 (Jacobi-Identität). *Keine der Thetanullwerte $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ verschwindet irgendwo auf \mathbb{H} . Es gilt die Identität*

$$\theta_1^4 = \theta_2^4 + \theta_3^4.$$

Beweis. Die Halbperioden-Werte von Weierstraß sind paarweise verschieden, d.h. $e_i - e_j \neq 0$ überall. Es gilt

$$\theta_2^4 + \theta_3^4 = \frac{e_1 - e_3}{\pi^2} + \frac{e_3 - e_2}{\pi^2} = \frac{e_1 - e_2}{\pi^2} = \theta_1^4. \quad \square$$

Korollar 6.41 (Vier-Quadrate-Satz von Jacobi). Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Anzahl

$$r_4(n) = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n \right\}$$

der Darstellungen von n als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen ist

$$r_4(n) = \begin{cases} 8 \cdot \sigma_1(n) & : \quad n \text{ ungerade;} \\ 24 \cdot \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d & : \quad n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Insbesondere ist $r_4(n) > 0$, d.h. jede natürliche Zahl hat eine Darstellung als Summe von vier Quadraten.

Beweis. Als Cauchy-Produkt gilt

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_4(n)q^{n/2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} \right)^4 = \theta_1^4.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \theta_1^4 &= \frac{e_1 - e_2}{\pi^2} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d \right) q^n \right) + \frac{1}{3} \left(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d \right) q^{n/2} \right). \end{aligned}$$

Für ungerades n kommt $q^{n/2}$ nur im zweiten Summand vor. Die Bedingung d ungerade für die Teiler von n ist dann leer, und wir erhalten

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d = 8\sigma_1(n).$$

Für gerades n wird in beiden Summanden über den ungeraden Teilern von n summiert:

$$r_4(n) = 16 \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d + 8 \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d = 24 \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ungerade}}} d. \quad \square$$

6.6.3. Das Jacobi-Tripelprodukt

Das Jacobi-Tripelprodukt ist die folgende Identität:

Satz 6.42. Für $\tau \in \mathbb{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei $q = e^{2\pi i\tau}$ und $\zeta = e^{2\pi iz}$. Dann gilt

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} \zeta^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-1/2}\zeta)(1 + q^{n-1/2}\zeta^{-1}).$$

Für beliebiges, festes $\tau \in \mathbb{H}$ (d.h. $|q| < 1$) konvergiert die rechte Seite lokal gleichmäßig und definiert eine ganze Funktion von $\zeta \in \mathbb{C}$.

Beweis. ³ Sei

$$f(\zeta) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-1/2}\zeta)(1 + q^{n-1/2}\zeta^{-1}).$$

Die Substitution $\zeta \mapsto q \cdot \zeta$ bewirkt eine Indexverschiebung, bei der nur der Anfang des Produktes geändert wird:

$$\begin{aligned} f(q \cdot \zeta) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n+1/2}\zeta)(1 + q^{n-3/2}\zeta^{-1}) \\ &= \frac{1 + \zeta^{-1}q^{-1/2}}{1 + \zeta q^{1/2}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n+1/2}\zeta)(1 + q^{n-1/2}\zeta^{-1}) \\ &= \frac{1 + \zeta^{-1}q^{-1/2}}{1 + \zeta q^{1/2}} \cdot f(\zeta) \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta q^{1/2}}. \end{aligned}$$

Nach dieser Funktionalgleichung erfüllt die Laurent-Reihe

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(q) \zeta^n$$

die Identität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(q) \zeta^n = f(\zeta) = \zeta q^{1/2} f(q\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n+1/2} c_n(q) \zeta^{n+1},$$

d.h. die Rekurrenz

$$c_{n+1}(q) = c_n(q) \cdot q^{n+1/2}.$$

Insbesondere sind alle Laurent-Koeffizienten durch $c_0(q)$ bestimmt:

$$c_n(q) = c_0(q) \cdot q^{(n-1/2)+(n-1-1/2)+\dots+(1/2)} = c_0(q) \cdot q^{n^2},$$

also

$$f(\zeta) = c_0(q) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \zeta^n.$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass $c_0(q) = 1$ ist. Dazu verwenden wir den folgenden Trick:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(i) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + iq^{n-1/2})(1 - iq^{n-1/2}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{2n-1}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})(1 + q^{2n-1}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{4n-2}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2})^2,
 \end{aligned}$$

(wobei die Identität $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$ und die Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})$$

mehrmals verwendet wird) aber auch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} i^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2},$$

also

$$c_0(q) \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2})^2.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1/2})(1 - q^{n-1/2}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1/2})^2
 \end{aligned}$$

aber auch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2},$$

also

$$c_0(q) \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1/2})^2$$

und damit (nach Substitution $q \mapsto q^4$)

$$c_0(q^4) \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2})^2.$$

Vergleicht man (i) und (ii), so erhalten wir

$$c_0(q) = c_0(q^4).$$

Durch Wiederholung von dieser Identität erhält man mit der Stetigkeit von c_0 :

$$c_0(q) = c_0(q^4) = c_0(q^{16}) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} c_0(q^{n^4}) = c_0(0),$$

d.h. c_0 ist konstant. Vergleichen der konstanten Terme auf beiden Seiten der Identität zeigt $c_0 = 1$. \square

Die Jacobi-Tripelproduktidentität enthält viele Produktidentitäten für Modulformen als Spezialfälle.

Korollar 6.43. *Die Thetafunktion*

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} \zeta^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \zeta = e^{2\pi i z}$$

besitzt bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ als ganze Funktion von z nur einfache Nullstellen, genau in den Punkten

$$z = (m + 1/2)\tau + (n + 1/2), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Denn die Faktoren $(1 - q^n)$ können niemals 0 werden, und aus den Faktoren $1 + q^{n-1/2} \zeta^{\pm 1}$ ergeben sich Nullstellen in genau den erwähnten Stellen.

Korollar 6.44. *Die Thetanullwerte*

$$\theta_1(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2}, \quad \theta_2(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2/2}, \quad \theta_3(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(2n+1)^2/8}$$

besitzen die Produktentwicklungen

$$\theta_1(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-1/2})^2;$$

$$\theta_2(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1/2})^2;$$

$$\theta_3(\tau) = q^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{n-1}) = 2q^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^n).$$

Beweis. Man setzt in

$$\begin{aligned}\theta_1(\tau) &= \theta(\tau, 0), \\ \theta_2(\tau) &= \theta(\tau, 1/2), \\ \theta_3(\tau) &= q^{1/8} \cdot \theta(\tau, \tau/2)\end{aligned}$$

das Jacobi-Tripelprodukt ein. □

Korollar 6.45. *Für die modulare Diskriminante gilt die Produktformel von Jacobi:*

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Beweis. Das folgt ohne viel Mühe aus der Identität

$$\Delta = \left(\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{2} \right)^8$$

und aus den Produktformeln für $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. □

Korollar 6.46 (Eulers Pentagonalzählensatz). *Für die 24-te Wurzel von Δ gilt die Formel*

$$q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(6n-1)^2/24}.$$

Viele Terme im Produkt $q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ heben sich also auf:

$$q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = q^{1/24} - q^{25/24} - q^{49/24} + q^{121/24} + q^{169/24} - q^{289/24} \pm \dots$$

Die Funktion $\eta(\tau) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ ist die *Dedekind'sche Eta-Funktion*.

Beweis. Man setze $(\tau, z) = (3\tau, 1/2 + \tau/2)$ bzw. $(q, \zeta) = (q^3, -q^{-1/2})$ in das Tripel-

Produkt ein.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(6n-1)^2/24} &= q^{1/24} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(3n^2-n)/2} \\ &= q^{1/24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^3)^{n^2/2} \cdot (-q^{1/2})^n \\ &= q^{1/24} \theta(3\tau, 1/2 + \tau/2) \\ &= q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - q^{3n})(1 - q^{3n-1})(1 - q^{3n-2})] \\ &= q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).\end{aligned}$$

□