

Funktionentheorie I

Universität Heidelberg
Institut für Mathematik
Sommersemester 2026

Brandon Williams

Inhaltsverzeichnis

0	Was ist Funktionentheorie?	3
1	Komplexe Zahlen	4
1.1	Der Körper $\mathbb{C}$	4
1.2	Algebra in $\mathbb{C}$	8
1.3	$\mathbb{C}$ als topologischer Raum	10
2	Komplexwertige Funktionen	14
2.1	Stetige Funktionen	14
2.2	Komplexe Differenzierbarkeit	16
2.3	Potenzreihen	21
2.4	Exp und Log	27
3	Das komplexe Integral	32
3.1	Komplexe Wegintegrale	32
3.2	Der Cauchysche Integralsatz	43
3.3	Die Cauchysche Integralformel	52
3.4	Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel	55
3.5	Homotopie, Homologie und die Umlaufzahl	61
4	Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen	66
4.1	Der Identitätssatz	66
4.2	Das Prinzip vom Argument	68
4.3	Der Satz von der Gebietstreue	74
4.4	Lemma von Schwarz	77
5	Der Residuensatz	79
5.1	Isolierte Singularitäten	79
5.2	Laurent-Reihen	83
5.3	Der Residuensatz	90
5.4	Anwendungen des Residuensatzes	94
5.5	Meromorphe Abbildungen und die Riemann'sche Zahlenkugel	111
6	Konforme Abbildungen	118
6.1	Konforme Abbildungen	118
6.2	Möbiustransformationen	119

6.3	Elementare Beispiele	126
6.4	Der Satz von Montel	132
6.5	Der Satz von Hurwitz	135
6.6	Der Riemann'sche Abbildungssatz	136
6.7	Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip	141
6.8	Die Schwarz–Christoffel-Formel	146

0. Was ist Funktionentheorie?

Funktionentheorie ist **Analysis über $\mathbb{C}$** , der Körper der komplexen Zahlen. Man beschäftigt sich in der Funktionentheorie hauptsächlich mit *holomorphen Funktionen*, also Funktionen, die auf der komplexen Ebene (oder eine Teilmenge davon) definiert sind, komplexe Werte annehmen, und in jedem Punkt eine komplexwertige Ableitung besitzen.

Die Differenzierbarkeit im Komplexen verhält sich grundlegend anders als in der reellen Analysis. Wir werden insbesondere sehen, dass holomorphe Funktionen automatisch analytisch sind - das heißt, unendlich oft stetig differenzierbar und lokal um jeden Punkt eine Darstellung als Potenzreihe besitzen.

Funktionentheorie hat viele Anwendungen in anderen Bereichen der Mathematik, zum Beispiel in der Algebra (Fundamentalsatz der Algebra: jedes nichtkonstante Polynom über $\mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle) und in der Zahlentheorie (Verteilung der Primzahlen und die Riemann'sche Zetafunktion), sowie praktische Anwendungen wie die Berechnung reeller Integrale.

1. Komplexe Zahlen

1.1. Der Körper $\mathbb{C}$

Als additive Gruppe definieren wir $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Für ein Tupel (a, b) verwenden wir aber so gut wie immer die Schreibweise

$$a + bi \in \mathbb{C}.$$

Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ergibt sich aus Kommutativität, Assoziativität, den Distributivgesetzen und der Vorschrift

$$i^2 = -1.$$

Das heißt explizit:

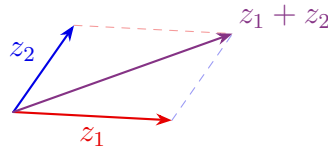
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

bzw.

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Dass diese Vorschrift kommutativ und assoziativ ist und die Distributivgesetze gelten, kann man nachrechnen. Die reellen Zahlen findet man in $\mathbb{C}$ als Unterkörper der Elemente $a + 0i$; das Einselement in $\mathbb{C}$ ist insbesondere $1 = 1 + 0i$.

Diese geometrische Darstellung der komplexen Zahlen nennt man die **Gaußsche Ebene**. Die Addition zweier komplexer Zahlen visualisiert man sich in der Ebene genauso wie die von reellen Vektoren:



Die Invertierbarkeit eines Elements $x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$ ist die Frage nach einer Lösung $a + bi$ von

$$(a + bi)(x + iy) = 1.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Da die Matrixdeterminante hier

$$\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

ist, existiert immer die (eindeutige) Lösung, wenn $x + iy$ bzw. (x, y) ungleich 0 ist. Damit ist $\mathbb{C}$ ein **Körper**.

Bemerkung 1.1. Die Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ aus der Rechnung oben ist genau die Darstellungsmatrix der „Multiplikation-mit- $(x + iy)$ “-Abbildung, d.h. der linearen Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (a + ib) \mapsto (a + ib) \cdot (x + iy)$$

bzgl. der Standardbasis $\{1, i\}$. Die Spalten stellen also die komplexen Zahlen

$$1 \cdot (x + iy) = x + iy, \quad i \cdot (x + iy) = -y + ix$$

dar.

Bemerkung 1.2. In der Algebra wird der Körper der komplexen Zahlen durch

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$$

definiert, d.h. die Adjunktion einer Quadratwurzel von -1 zu $\mathbb{R}$. Das entspricht der Definition in der Funktionentheorie nicht genau. Denn hier wird eine der zwei Quadratwurzeln von (-1) ein für alle Mal gewählt, und zwar $i := (0, 1)$.

Damit ist $\mathbb{C}$ ein **orientierter** Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Basis $\{1, i\}$ ist positiv orientiert; die Basis $\{1, -i\}$ dagegen negativ orientiert.

Definition 1.3. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist die **komplex konjugierte Zahl**

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}.$$

Es gilt dann

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Falls $z \neq 0$, ist $z \cdot \bar{z}$ auch $\neq 0$ und es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Man hat auch die einfachen Formeln

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Definition 1.4. Den Absolutbetrag $|z|$ definiert man über die (Euklidische) Norm auf $\mathbb{R}^2$: für $z = x + iy$ ist

$$|z| = |x + iy| := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Wenn $z = x + iy$, gilt nach Konstruktion

$$|x| \leq |z| \text{ und } |y| \leq |z|.$$

Wir haben auch die Dreiecksungleichung: für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen hat auch eine geometrische Bedeutung. Dazu führen wir die Polarform ein:

Definition 1.5. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

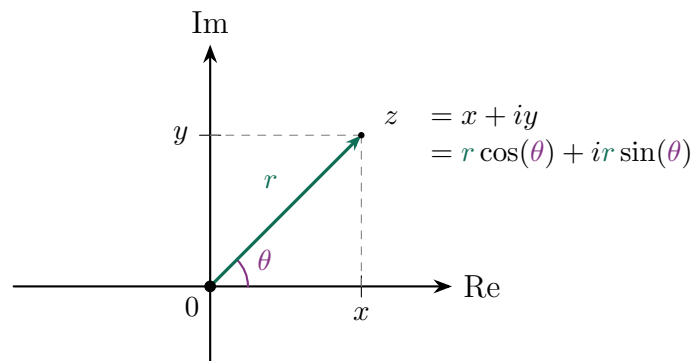
Ein **Argument** $\theta = \arg(z)$ von z ist eine reelle Zahl, die den Winkel zwischen z und dem Strahl $\mathbb{R}_{>0}$ beschreibt.

Der **Hauptwert** $\text{Arg}(z)$ des Arguments ist das Argument θ mit

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Die **Polarform** von z ist die Darstellung

$$z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta), \quad r := |z|, \quad \theta = \text{Arg}(z).$$



Die Argumente von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind also genau

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für eine komplexe Zahl in Polarform

$$z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$$

ist nach Definition $\operatorname{Re}[z] = r \cos(\theta)$, $\operatorname{Im}[z] = r \sin(\theta)$. Die Umkehrung ist

$$z = x + iy$$

$$\implies r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \begin{cases} y/x : & x \neq 0; \\ \pm\infty : & x = 0. \end{cases}$$

Beispiel 1.6. Für $z = 1 + i$ gilt: $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ und

$$\arg(z) = \{ \dots, -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots \}.$$

Lemma 1.7. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \bmod 2\pi.$$

Beweis. Mit

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 \cos(\theta_1) + ir_1 \sin(\theta_1)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 \cos(\theta_2) + ir_2 \sin(\theta_2)$$

ist

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Man verwendet die Additionssätze

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2);$$

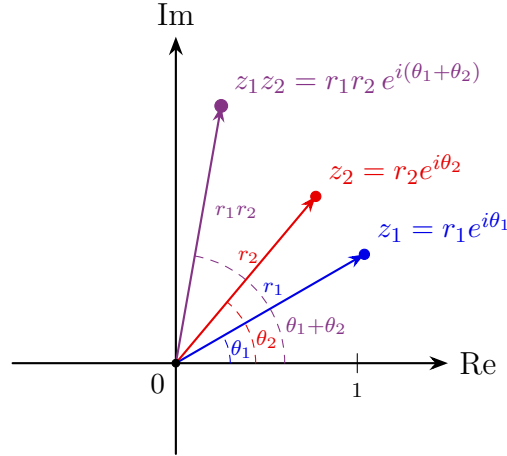
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2).$$

Das führt zu

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + ir_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

also $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ und $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 \bmod 2\pi$. □

Mit anderen Worten: bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden Absolutbeträge multipliziert und Argumente addiert.



Beispiel 1.8. Geometrische Figuren in der Ebene lassen sich auch durch Gleichungen in den Variablen z und $\bar{z}$ beschreiben. Wir listen hier einige nützliche Beispiele auf:

- (i) Der Kreis mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ ist

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Mit $a = \alpha + i\beta$ bedeutet diese Gleichung

$$|z - a|^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

- (ii) Die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ ist

$$B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

Wir schreiben oft $\varepsilon = r$ und nennen $B_\varepsilon(a)$ die ε -**Umgebung** von a .

- (iii) Die Gerade von $a \in \mathbb{C}$ nach $b \in \mathbb{C}$ (mit $b \neq a$) ist

$$\ell := \{z = a + (b - a)t : t \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Gerade teilt die komplexe Ebene in eine **linke** und eine **rechte Halbebene** auf:

$$\mathbb{H}_l := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left[\frac{z - a}{b - a} \right] > 0 \right\};$$

$$\mathbb{H}_r := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left[\frac{z - a}{b - a} \right] < 0 \right\}.$$

Links bzw. rechts bezieht sich dabei auf die Fahrtrichtung. Auf einer Fahrt von a nach b entlang ℓ sieht man $\mathbb{H}_l$ bzw. $\mathbb{H}_r$ aus dem jeweiligen Fenster.

1.2. Algebra in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ist ein natürlicher Grundkörper für die Untersuchung von Nullstellen von Polynomen. Aus historischer Sicht wurden komplexe Zahlen genau deswegen definiert. Wir haben

es hier nur mit Nullstellen spezieller Polynome zu tun. Für den Beweis des allgemeinen Fundamentalsatzes der Algebra brauchen wir etwas mehr Funktionentheorie.

Proposition 1.9. *Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren in $\mathbb{C}$ genau n paarweise verschiedene Lösungen der Gleichung*

$$z^n = a.$$

Zusatz: hat a die Polarform

$$a = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta),$$

dann sind die Lösungen genau

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cos(\theta_k) + i \sqrt[n]{r} \sin(\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Hier ist $\sqrt[n]{r}$ die eindeutige n te Wurzel von r in $\mathbb{R}_{>0}$.

Zusatz 2: die Gleichung $z^n = 0$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{C}$, und zwar $z = 0$.

Beweis. Sei

$$z = \rho \cos(\varphi) + i\rho \sin(\varphi) = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

eine komplexe Zahl in Polarform. Nach dem Moivreschen Satz ist

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \right)^n \\ &= \rho^n \cos(n\varphi) + i\rho^n \sin(n\varphi). \end{aligned}$$

Also ist $z^n = a$ genau dann, wenn

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad \cos(n\varphi) = \cos(\theta), \quad \sin(n\varphi) = \sin(\theta).$$

Mit anderen Worten, genau dann, wenn $\rho = \sqrt[n]{r}$ und

$$n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

bzw.

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \bmod 2\pi.$$

□

Beispiel 1.10. Für den **Hauptzweig** der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{\cdot}$ gilt

$$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \text{Arg}(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n} \text{Arg}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Und $\sqrt[n]{0}$ kann nur 0 sein. In der Funktionentheorie ist das Symbol $\sqrt[n]{\cdot}$ mit viel Vorsicht zu benutzen!

Beispiel 1.11. $a = i$ hat Betrag 1 und Hauptargument $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$. Da

$$\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(5\pi/4) = \sin(5\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

sind die zwei Quadratwurzeln

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

Bemerkung 1.12. Das quadratische Polynom $z^2 - 2pz - q$ hat die komplexen Nullstellen

$$z = p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

(also 2 Nullstellen, wenn $q \neq -p^2$ und eine sonst). Der Beweis ist einfach.

Diese p - q Formel ist seit der Antike bekannt, wurde aber anscheinend nicht ins Komplexe übertragen.

Historisch hat erst das deutlich schwierigere Problem für kubische Polynome zu den komplexen Zahlen geführt. Für die Nullstellen des Polynoms $z^3 + 3pz - 2q$ entdeckte man¹ die folgende Formel:

$$z = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}.$$

Jetzt kommt man ans Komplexe nicht mehr vorbei, denn auch für reelle p, q und reelle Nullstellen können in dieser Darstellung Quadratwurzeln negativer Zahlen vorkommen.

Diese Formulierung der kubischen Formel ist ungenau oder sogar falsch, weil das Symbol $\sqrt[3]{\cdot}$ mehrdeutig ist. Man muss die Zweige von $\sqrt[3]{\cdot}$ passend wählen, sodass es (höchstens) drei Nullstellen gibt. Das Problem wird auf den Übungszettel verschoben.

1.3. $\mathbb{C}$ als topologischer Raum

Die Topologie von $\mathbb{C}$ ist dieselbe wie die von $\mathbb{R}^2$. Zur Vollständigkeit schreiben wir einiges aus.

Definition 1.13. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt **konvergent** mit Limes

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Nach unserer Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ ist das genau der Konvergenzbegriff auf $\mathbb{R}^2$. Aus den Eigenschaften von Grenzwerten in $\mathbb{R}^2$ folgen sofort die folgenden Lemmata:

¹Cardano, del Ferro oder Tartaglia. Die Entdeckung der kubischen Formel ist einer der bekanntesten Prioritätsstreite der Mathematik.

- Bemerkung 1.14.** (i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
(ii) Eine konvergente Folge ist auch beschränkt, d.h. es gibt $M > 0$ mit $|a_n| \leq M \forall n$.
(iii) Für zwei konvergente Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} &= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}; & \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|; \\ \operatorname{Re} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[a_n]; & \operatorname{Im} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}[a_n];\end{aligned}$$

und wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, dann ist $a_n \neq 0$ für jedes hinreichend große n und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

- (iv) Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine **Cauchy-Folge** ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad m, n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Definition 1.15. Unter einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man den Grenzwert der Folge der Partialsummen

$$s_N := \sum_{n=1}^N a_n.$$

Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und in diesem Fall definiert man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} s_N.$$

Die bekannten Konvergenzkriterien für Reihen gelten in $\mathbb{C}$ genau wie in $\mathbb{R}$: Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist notwendig $(a_n)_n$ eine Nullfolge, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Die Umkehrung bleibt falsch. Man hat auch den Begriff der absoluten Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert.}$$

Wie in $\mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann absolut, wenn jede umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ auch konvergiert (und zwar gegen den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Bemerkung 1.16. Schreibt man $a_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, dann folgt aus Bemerkung 1.14(iii): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergieren, und in diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) + i \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \right).$$

Beispiel 1.17. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergiert (absolut) genau dann, wenn $|r| < 1$. Der Grenzwert ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Definition 1.18. (i) Die **offene Kreisscheibe** mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ ist

$$B_r^\circ(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

(ii) Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn zu jedem $a \in U$ ein $r = r_a > 0$ existiert mit $B_r^\circ(a) \subseteq U$.

(iii) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

(iv) Eine Menge $B \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn $\sup_{z \in B} |z| < \infty$. Mit anderen Worten, B ist beschränkt, wenn B in eine offene Kreisscheibe $B_r^\circ(0)$ um 0 enthalten ist.

Man erinnere sich an den folgenden Satz der reellen Analysis:

Satz 1.19 (Bolzano–Weierstraß, Heine–Borel).

Für eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) K ist beschränkt und abgeschlossen;
- (ii) Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K ;
- (iii) Jede offene Überdeckung von K (d.h. Familie offener Mengen, deren Vereinigung K enthält) besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

In diesen Fällen heißt K **kompakt**.

Als Letztes brauchen wir den Begriff eines Gebietes.

Definition 1.20. (i) Eine Menge $Z \subseteq \mathbb{C}$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in Z$ einen Weg von x nach y gibt; d.h. eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow Z$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$.

(ii) Eine offene wegzusammenhängende Menge $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$ heißt **Gebiet**.

Lemma 1.21. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $D \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) D ist ein Gebiet;

(ii) D besitzt keine Darstellung als disjunkte Vereinigung

$$D = U \cup V$$

mit offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$, $U, V \neq \emptyset$.

(ii) ist die Definition einer zusammenhängenden (nicht wegzusammenhängenden) Teilmenge.

Das ist ein Spezialfall der folgenden Tatsache: für *offene* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ stimmen Zusammenhang und Wegzusammenhang überein. Wir überspringen den Beweis.

2. Komplexwertige Funktionen

2.1. Stetige Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

Es gibt dann eindeutig bestimmte Funktionen

$$u = \operatorname{Re}[f] : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad v = \operatorname{Im}[f] : D \rightarrow \mathbb{R},$$

sodass $f = u + iv$. Wir fassen u und v als reelle Funktionen

$$u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf. Diese Notation wird im Folgenden immer wieder verwendet.

Für einen Häufungspunkt $z_0 \in D$ (d.h. jede ε -Umgebung von z_0 enthält unendlich viele Elemente von D) und eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ verwendet man die Schreibweise

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a,$$

falls für jede Folge $(z_n)_n$ in D mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$.

Definition 2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt.

(i) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **stetig** in z_0 , wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ gilt.

(ii) Angenommen, jeder Punkt von D ist Häufungspunkt (z.B. D offen). Dann heißt $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ **stetig**, wenn f in jedem Punkt $z \in D$ stetig ist.

Genau wie über $\mathbb{R}$ kann man Stetigkeit in z durch eine ε - δ Formulierung ausdrücken:

$$f \text{ stetig in } z \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |w - z| < \delta \text{ und } w \in D \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon.$$

Lemma 2.2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$;

(ii) Die Funktionen $u = \operatorname{Re}[f]$ und $v = \operatorname{Im}[f]$ sind stetig in (x_0, y_0) ;

(iii) Die Funktion

$$F = (u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

ist stetig in (x_0, y_0) .

Beweis. Sei $(z_n)_n$ eine konvergente Folge in D mit Grenzwert z . Dann konvergiert die Folge $f(z_n)$ genau dann, wenn $u(z_n)$ und $v(z_n)$ konvergieren, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) \right) + i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v(z_n) \right).$$

Damit sind (i) und (ii) äquivalent.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist reelle Analysis. □

Lemma 2.3. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Ist $g(z) \neq 0$ auf D , so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig.

Beweis. Das beweist man genau wie im Reellen. □

Beispiel 2.4. (i) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ definiert eine stetige Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

(ii) Die Funktionen $f(z) = |z|$, $f(z) = \operatorname{Re}[z]$ und $f(z) = \operatorname{Im}[z]$ sind stetig.

(iii) Das Hauptargument, als Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \operatorname{Arg}(z),$$

ist nicht stetig auf der Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$. Zum Beispiel ist $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, aber für jede konvergente Folge $z_n \rightarrow -1$ mit $\operatorname{Im}(z_n) < 0$ findet man $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Arg}(z_n) = -\pi$.

Die Grenzfunktion einer *gleichmäßig konvergenten* Folge stetiger Funktionen ist stetig. Wir wiederholen den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus der reellen Analysis:

Definition 2.5. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Dann konvergiert f_n gegen eine Grenzfunktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ **gleichmäßig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{sodass} \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ über Funktionen $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert gleichmäßig, wenn das für die Folge der Partialsummen $s_N = \sum_{n=1}^N f_n$ gilt. Sind dabei alle f_n stetig, so ist dann auch die Grenzfunktion $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stetig. Die Konvergenz heißt *gleichmäßig absolut*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ gleichmäßig konvergiert.

In der Praxis verwendet man oft den Weierstraß'schen *M*-Test, um die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge zu beweisen; das heißt, man verwendet den stärkeren Begriff der *normalen Konvergenz*.

Definition 2.6. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **normal konvergent** auf A , wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in A} |f_n(z)|$$

konvergiert.

Mit anderen Worten: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert normal auf A genau dann, wenn es Konstanten $M_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ konvergiert und $|f_n(z)| \leq M_n$ für $z \in A$.

Lemma 2.7 (Weierstraß'scher M -Test). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine auf $A \subseteq \mathbb{C}$ normal konvergierende Funktionenreihe. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig absolut.

2.2. Komplexe Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge.

Definition 2.8. (i) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist in einem Punkt $z_0 \in D$ **(komplex) differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

(ii) Die Funktion f heißt **holomorph** in D , wenn f in jedem Punkt $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist.

Das heißt: für jede Folge $(z_n)_n$ in D mit Grenzwert z_0 existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0},$$

und der Wert darf nicht von der Folge abhängen.

Beispiel 2.9. Die Funktion $f(z) = z^n$ ist komplex differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Ableitung ist

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) = n z_0^{n-1}.$$

Die aus der (reellen) Analysis bekannten Rechenregeln gelten auch für die komplexe Ableitung. Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0 \in D$, so sind auch $f + g$ und $f \cdot g$

differenzierbar und

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \quad (f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Lemma 2.10. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in z_0 differenzierbar mit Ableitung $a := f'(z_0)$;

(ii) f ist linear approximierbar: es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(z_0) = a$ und

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0), \quad z \in D.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es kann nur eine Definition für φ geben:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} : & z \neq z_0; \\ a : & z = z_0. \end{cases}$$

Nach der Definition der Differenzierbarkeit von f ist φ stetig in z_0 .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Umgekehrt folgt aus $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$ für jede Folge $(z_n)_n$ in D mit Grenzwert z_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \varphi(z_0),$$

da φ stetig in z_0 ist. □

Korollar 2.11. Eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion f ist dort stetig.

Beweis. Nach Lemma 2.10 hat f die Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$$

und φ ist stetig in z_0 . Damit ist auch f stetig in z_0 . □

Lemma 2.12. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbare Funktionen.

(i) $f + g$ ist in z_0 differenzierbar und

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(ii) $f \cdot g$ ist in z_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

(iii) Falls $g(z) \neq 0$ auf D , so ist $\frac{f}{g}$ in z_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Der Beweis ist ähnlich wie in der reellen Analysis. Man schreibt

$$f(z) = f(z_0) + \varphi_f(z)(z - z_0), \quad g(z) = g(z_0) + \varphi_g(z)(z - z_0)$$

mit in z_0 stetigen Funktionen φ_f, φ_g und erhält Darstellungen für $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$.

Lemma 2.13 (Kettenregel). Seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow E$ komplex differenzierbar in $z_0 \in D$ und $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0) =: w_0$. Dann ist $g \circ f$ komplex differenzierbar in z_0 , und

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

Beweis. Nach Lemma 2.10 existieren in z_0 bzw. w_0 stetige Funktionen $\varphi_f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_g : E \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) - f(z_0) = \varphi_f(z)(z - z_0), \quad g(w) - g(w_0) = \varphi_g(w)(w - w_0), \quad z \in D, w \in E.$$

Das führt zu

$$\begin{aligned} g(f(z)) - g(f(z_0)) &= \varphi_g(f(z)) \cdot (f(z) - f(z_0)) \\ &= \varphi_g(f(z)) \varphi_f(z)(z - z_0) \\ &:= \varphi(z)(z - z_0). \end{aligned}$$

Die Funktion $\varphi(z) = \varphi_g(f(z)) \cdot \varphi_f(z)$ ist dabei stetig in z_0 , da f und φ_f dort stetig sind und φ_g in $f(z_0)$ stetig ist. Nach Lemma 2.10 ist $g \circ f$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(g \circ f)'(z_0) = \varphi(z_0) = \varphi_g(f(z_0)) \varphi_f(z_0) = g'(w_0) f'(z_0). \quad \square$$

Als Letztes übersetzen wir den Begriff der komplexen Differenzierbarkeit in die Sprache der reellen Funktionen $u = \operatorname{Re}[f]$ und $v = \operatorname{Im}[f]$.

Satz 2.14 (Cauchy–Riemann-Gleichungen). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Man schreibe*

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y), \quad x + iy \in D.$$

Dann sind äquivalent:

- (i) f ist in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar;*
- (ii) u und v sind in (x_0, y_0) (total) differenzierbar und*

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0).$$

In diesem Fall gilt

$$f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i \partial_x v(x_0, y_0).$$

Das kann man so verstehen: Die Jacobi-Matrix einer allgemeinen total differenzierbaren Funktion $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, aufgefasst als Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ist

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}.$$

F erfüllt die Cauchy–Riemann-Gleichungen genau dann, wenn DF die Form

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}$$

hat. Das ist genau die Matrix, die die komplexe Zahl

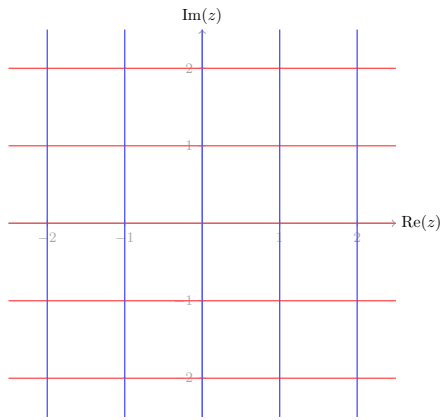
$$\partial_x u(x_0, y_0) + i \partial_x v(x_0, y_0) = f'(z_0)$$

darstellt!

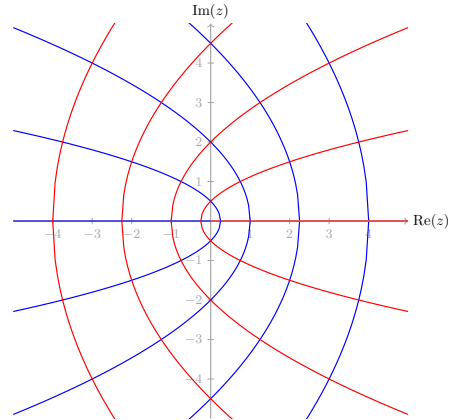
Falls $f'(z_0) \neq 0$, ist $DF(x_0, y_0)$ von der Form

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

insbesondere orientierungstreu und winkeltreu.

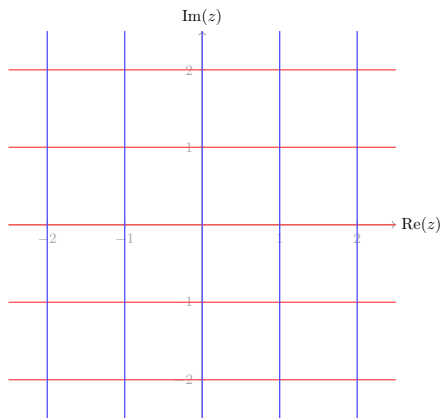


(a) $f(z) = z$

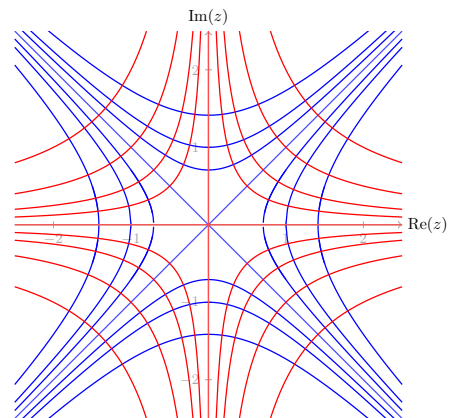


(b) $f(z) = z^2$

Figur 2.1: Geraden $\operatorname{Re}[z] = c$ (blau) und $\operatorname{Im}[z] = c$ (rot) und ihre Bilder unter der Abbildung $z \mapsto z^2$. Wegen der Winkeltreue der Abbildung $z \mapsto z^2$ außerhalb von $z = 0$ schneiden sich die Kurven orthogonal.



(a) $f(z) = z$



(b) $f(z) = z^2$

Figur 2.2: Höhenlinien von $u = \operatorname{Re}[f]$ (blau) und $v = \operatorname{Im}[f]$ (rot). Wegen der Winkeltreue schneiden sich auch diese Kurven außerhalb von $z = 0$ orthogonal.

Beweis. Nach Definition gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& f \text{ ist komplex differenzierbar in } z_0 \text{ und } a = \alpha + i\beta = f'(z_0) \\
\Leftrightarrow & a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\
\Leftrightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ah}{|h|} = 0 \\
\Leftrightarrow & \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{u(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - u(x_0, y_0) - (\alpha h_x - \beta h_y)}{\|(h_x, h_y)\|} \right. \\
& \quad \left. + i \cdot \frac{v(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - v(x_0, y_0) - (\beta h_x + \alpha h_y)}{\|(h_x, h_y)\|} \right] = 0.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung schreiben wir $h = h_x + ih_y$ und $ah = (\alpha h_x - \beta h_y) + i(\alpha h_y + \beta h_x)$. Die Existenz der letzten beiden Grenzwerte ist genau die (totale) Differenzierbarkeit von u und v mit

$$\begin{aligned}
\nabla u &= (\partial_x u \quad \partial_y u) = (\alpha \quad -\beta), \\
\nabla v &= (\partial_x v \quad \partial_y v) = (\beta \quad \alpha).
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.15. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 0 \quad \forall z \in D$. Dann ist f konstant.

Beweis. Man schreibe $f = u + iv$. Dann sind u und v total differenzierbar auf D und mit

$$0 = f'(z) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u, \quad z \in D$$

sehen wir, dass ∇u und ∇v auf D identisch verschwinden. Außerdem ist D zusammenhängend. Nach einem Satz aus der reellen Analysis sind u und v konstant; daher ist auch f konstant. □

2.3. Potenzreihen

Definition 2.16. Eine formale Reihe der Form

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n, a \in \mathbb{C}$$

heißt **Potenzreihe** mit Entwicklungspunkt a .

Es kann sein, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ für irgendwelche komplexe Zahlen $z \neq a$ konvergiert. Für solche z kann man $P(z)$ als Funktionsvorschrift betrachten.

Das wollen wir aber (noch) nicht verlangen.

Für ein fest gewähltes $a \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{C}[[z - a]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n : (c_n)_n \subseteq \mathbb{C} \right\}$$

die Menge aller Potenzreihen mit Entwicklungspunkt a . Man hat eine Einbettung

$$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}[[z - a]],$$

die $c \in \mathbb{C}$ mit der konstanten Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_0 = c, \quad c_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

identifiziert.

Proposition 2.17. (i) $\mathbb{C}[[z - a]]$ ist ein kommutativer Ring mit 1. Die 0- und 1-Elemente sind die konstanten Potenzreihen 0 und 1. Die Addition ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) (z - a)^n$$

und die Multiplikation ist durch das **Cauchy-Produkt** gegeben:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} c_i d_j \right) (z - a)^n.$$

(ii) Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ ist genau dann in $\mathbb{C}[[z - a]]$ invertierbar, wenn $c_0 \neq 0$.

Beweis. (i) Nachrechnen.

(ii) Die Existenz einer inversen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n$ ist gleichbedeutend mit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} c_i d_j \right) (z - a)^n = 1,$$

also die Lösbarkeit der Gleichungen

$$c_0 d_0 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i+j=n} c_i d_j = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Aus $c_0 d_0 = 1$ folgt notwendig $c_0 \neq 0$. Umgekehrt: wenn $c_0 \neq 0$, dann findet man durch Induktion über n immer eine eindeutige Lösung der jeweiligen Gleichung:

$$d_0 = 1/c_0$$

und

$$c_0 d_n + \sum_{\substack{i+j=n \\ i>0}} c_i d_j = \sum_{i+j=n} c_i d_j = 0 \implies d_n = -\frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n c_i d_{n-i}. \quad \square$$

Lemma 2.18. Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe. Angenommen, $P(w)$ konvergiert für irgendein $w \in \mathbb{C}$ mit $\rho_0 := |w-a| > 0$. Dann konvergiert P gleichmäßig absolut auf jeder kompakten Kreisscheibe

$$\overline{B_\rho(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq \rho\}, \quad 0 < \rho < \rho_0.$$

Beweis. Wenn $P(w)$ konvergiert, dann bilden die Terme $c_n(w-a)^n$ in $P(w)$ eine Nullfolge. Wir finden daher eine Schranke $M > 0$, sodass

$$|c_n| \rho_0^n = |c_n(w-a)^n| \leq M \text{ für jedes } n.$$

Also $|c_n| \leq M/\rho_0^n$. Auf jeder kompakten Kreisscheibe $z \in \overline{B_\rho(a)}$ mit $\rho < \rho_0$ erhalten wir

$$|c_n(z-a)^n| \leq |c_n| \rho^n \leq M \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n =: \mu_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ ist eine konvergente geometrische Reihe. Nach dem Weierstraß'schen M -Test konvergiert $P(z)$ gleichmäßig absolut auf $\overline{B_\rho(a)}$. $\square$

Satz 2.19 (Satz von Cauchy–Hadamard). Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann existiert ein eindeutig bestimmter **Konvergenzradius** $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, sodass:

(i) $P(z)$ konvergiert absolut für $|z-a| < r$;

(ii) $P(z)$ divergiert für $|z-a| > r$.

Die Konvergenz ist gleichmäßig absolut auf jeder kompakten Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq \rho\}, \quad \rho < r.$$

Der Konvergenzradius ergibt sich aus der Formel (Wurzelkriterium)

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Zusatz: Falls $c_n \neq 0$ für alle hinreichend große $n \geq N$, dann gilt auch die Formel (Quotientenkriterium)

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|,$$

wenn dieser Grenzwert existiert. ($r = \infty$ ist hier auch erlaubt.)

Für eine nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ das Supremum der Grenzwerte ihrer konvergenten Teilfolgen. Man definiert $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ genau dann, wenn (a_n) unbeschränkt ist.

Im Fall $r = 0$ (bzw. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$) konvergiert die Potenzreihe $P(z)$ nur im Punkt $z = a$.

Im Fall $r = \infty$ (bzw. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$) konvergiert $P(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Die Eindeutigkeit von r (wenn es existiert) ist klar. Sei

$$r := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Wir zeigen, dass r (i) und (ii) erfüllt:

(i) Angenommen, $r > 0$. Sei $0 < \rho < r$ beliebig und sei ρ_0 mit $\rho < \rho_0 < r$. Da

$$\frac{1}{\rho_0} > \frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

folgt $\frac{1}{\rho_0} > \sqrt[n]{|c_n|}$ für alle bis auf endlich viele n , etwa für $n \geq N_0$. Dann gilt $|c_n| \leq |\rho_0|^{-n}$. Auf der kompakten Kreisscheibe $|z - a| \leq \rho$ gilt dann

$$|c_n(z - a)^n| \leq \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n, \quad n \geq N_0.$$

Die Reihe $\sum_{n \geq N_0} (\rho/\rho_0)^n$ konvergiert als geometrische Reihe. Nach dem Weierstraß'schen M -Test konvergiert $\sum c_n(z - a)^n$ gleichmäßig absolut auf $|z - a| \leq \rho$.

(ii) Angenommen, $r < \infty$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| > \sigma$ und sei $\rho > 0$ eine Zahl mit $|z - a| > \rho > r$. Da

$$\rho^{-1} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

gilt $|c_n| > \rho^{-n}$ für unendlich viele n . Für die Partialsummen

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k(z - a)^k$$

zu diesen Indizen n findet man:

$$|P_n(z) - P_{n-1}(z)| = |c_n(z - a)^n| > |c_n|\rho^n > 1.$$

Insbesondere ist $(P_n)_n$ keine Cauchy-Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ divergiert. □

Beweis vom Zusatz: angenommen,

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

existiert. Falls $\rho < \infty$ und $\sigma > \rho$, ist dann $|c_n|/|c_{n+1}| < \sigma$ für alle bis auf endlich viele n (etwa $n \geq N_0$). Also $|c_n| > \sigma^{-1}|c_{n-1}| > \dots > \sigma^{N_0-n}|c_{N_0}|$ und

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \geq \sigma^{-1} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sigma^{N_0}|c_{N_0}|} = \sigma^{-1}.$$

Nach dem Übergang zum Infimum über σ erhalten wir $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{\rho}$ und $r \leq \rho$. Falls $\rho > 0$, so zeigt man analog für jedes $\sigma < \rho$:

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \sigma^{-1},$$

also $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\rho}$ und $r \geq \rho$.

Es gibt keine allgemeine Quotientenkriterium-Variante des Satzes von Cauchy-Hadamard. Wenn der Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|/|c_{n+1}|$ nicht existiert, dann können wir keine Aussage treffen.

Man kann zum Beispiel Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

konstruieren, die ein ziemlich beliebiges Konvergenzverhalten aufweisen.

Beispiel 2.20. (i) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $r = 1$.
(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat auch den Konvergenzradius $r = 1$.
(iii) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$ hat Konvergenzradius $r = 0$. Das heißt: diese Reihe konvergiert für keine Zahl $z \neq 0$.

Für die Funktionentheorie sehr wichtig ist der folgende Satz.
Die formale Ableitung einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$, das formale Ergebnis der gliedweisen Anwendung von $\frac{d}{dz}$. Für konvergente Reihen ist das tatsächlich die Ableitung:

Satz 2.21. Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann definiert $P(z)$ eine holomorphe Funktion auf der offenen Kreisscheibe

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\},$$

und die Ableitung ist

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Dabei ist $P'(z)$ wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r .

Beweis. Der Einfachheit halber sei $a = 0$. (Im allgemeinen Fall ist

$$P(z + a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe bzw. Funktion, die dasselbe Holomorphie- und Konvergenzverhalten wie $P(z)$ aufweist.) Also $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Wir bezeichnen mit $P_n(z)$ die Partialsummen

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$$

und mit $R_n(z) = P(z) - P_n(z)$ die Restglieder.

Sei außerdem $Q(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. Dann hat Q den gleichen Konvergenzradius r wie P , nach der Formel von Cauchy–Hadamard:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{r}.$$

Also konvergiert $P'_n(z) = \sum_{k=1}^n k c_k z^{k-1}$ in der Kreisscheibe gegen Q .

Wir müssen Q mit den Differenzquotienten von P vergleichen. Seien dazu $z_0 \in D$ und ρ mit $|z_0| < \rho < r$, sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Für z mit $|z| < \rho$ und $z \neq z_0$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{P(z) - P(z_0)}{z - z_0} - Q(z_0) \\ &= \frac{P_n(z) + R_n(z) - P_n(z_0) - R_n(z_0)}{z - z_0} - Q(z_0) \\ &= \left(\frac{P_n(z) - P_n(z_0)}{z - z_0} - P'_n(z_0) \right) + (P'_n(z_0) - Q(z_0)) + \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz von P'_n gegen Q findet man ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass für $n > N_\varepsilon$ gilt:

$$|P'_n(z_0) - Q(z_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Für den dritten Term gilt

$$\begin{aligned} \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - z_0^k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \dots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}), \end{aligned}$$

also (da $|z|, |z_0| < \rho$)

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \cdot k \rho^{k-1}.$$

Da die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k z^{k-1}$ in $z = \rho < r$ konvergiert, existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (ohne Einschränkung der gleiche Index wie vorher, sonst vergrößern wir N_ε) sodass für $n > N_\varepsilon$ gilt:

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \cdot k \rho^{k-1} < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Die Partialsummen P_n sind differenzierbar in z_0 . Man kann also ein beliebiges $n > N_\varepsilon$ wählen und ein $\delta > 0$ finden, sodass

$$|z - z_0| < \delta \implies |z| < \rho \text{ und } \left| \frac{P_n(z) - P_n(z_0)}{z - z_0} - P'_n(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann haben wir insgesamt

$$|z - z_0| < \delta \implies \left| \frac{P(z) - P(z_0)}{z - z_0} - Q(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Damit ist $P(z)$ differenzierbar in $z = z_0$ und $P'(z_0) = Q(z_0)$. □

Satz 2.21 gilt für die abgeleitete Reihe $P'(z)$ ebenso. In der Tat sieht man nach wiederholtem Anwenden vom Satz 2.21, dass $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ auf $|z - a| < r$ unendlich oft komplex differenzierbar ist, und dass alle höheren Ableitungen durch konvergente Potenzreihen dargestellt werden:

$$P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n (z - a)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Im Punkt $z = a$ erhält man insbesondere

$$P^{(k)}(a) = k! \cdot c_k,$$

also (Taylor-Formel)

$$c_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a).$$

2.4. Exp und Log

Definition 2.22. Die **Exponentialfunktion** ist die durch die überall konvergierende Potenzreihe

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

dargestellte Funktion.

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat tatsächlich den Konvergenzradius $r = \infty$, denn: mit $c_n = \frac{1}{n!}$ ist

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| = |n+1| \longrightarrow \infty.$$

Lemma 2.23. (i) $\exp(z)$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z).$$

(ii) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

(iii) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

(iv) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) gilt

$$|\exp(z)| = e^x.$$

Insbesondere gilt $|e^{iy}| = 1$.

Beweis. (i) $\exp(z)$ ist holomorph nach Satz 2.21. Die Ableitung ist

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z).$$

(ii) Sei $w \in \mathbb{C}$ fest. Für die Funktion $f(z) := \exp(z) \exp(w-z)$ gilt (nach (i), Produktregel und Kettenregel)

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp'(z) \exp(w-z) - \exp(z) \exp'(w-z) \\ &= \exp(z) \exp(w-z) - \exp(z) \exp(w-z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, ist $f(z)$ konstant:

$$f(z) = f(0) = \exp(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Also gilt $\exp(w) = \exp(z) \exp(w-z)$. Nach der Substitution $w \mapsto z+w$ erhalten wir

$$\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w).$$

(iii) folgt aus (ii) mit $w = -z$:

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1.$$

(iv) Nach (ii) gilt

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = e^x \cdot e^{iy}.$$

Man rechnet

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy-iy} = 0,$$

also $|e^{iy}| = 1$ und

$$|\exp(z)| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| = e^x.$$

□

Definition 2.24. Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Die Entwicklungen von $\cos(z)$ und $\sin(z)$ als Potenzreihen erhält man aus

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n z^n.$$

Da

$$i^n + (-i)^n = \begin{cases} 2 : & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2 : & n \equiv 2 \pmod{4}; \\ 0 : & n \text{ ungerade}; \end{cases}$$

ist

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots$$

Analog:

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

Insbesondere stimmen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) mit den aus der reellen Analysis bekannten trigonometrischen Funktionen überein.

Bemerkung 2.25. Die Euler'sche Formel

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

gilt nach Definition. Also ist z.B.

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{-\pi i/2} = -i.$$

Aus $e^{2\pi i} = 1$ und $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ folgt die allgemeine Formel

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

d.h. $\exp(z)$ ist periodisch mit Periode $2\pi i$.

Definition 2.26. Sei $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Ein **Logarithmus** von w ist eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$.

Man schreibt dann $z = \log(w)$. Logarithmen sind nicht eindeutig!

Satz 2.27. Jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt unendlich viele Logarithmen. Die Logarithmen von w sind

$$\log(|w|) + i\theta + 2\pi in, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Hier ist $\log(|w|)$ der reelle Logarithmus und $\theta = \text{Arg}(w)$ der Hauptwert des Arguments.

Beweis. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann hat e^z die Polarform

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y).$$

Es gilt $e^z = w$ genau dann, wenn

$$|w| = e^x \text{ und } \text{Arg}(w) = y + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Also wenn $x = \log(|w|)$ und $y = \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. □

Definition 2.28. Der **Hauptwert** des Logarithmus $\text{Log}(w)$ ist

$$\text{Log}(w) := \log(|w|) + i \cdot \text{Arg}(w).$$

$\text{Log}(w)$ ist wie $\text{Arg}(w)$ nicht stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: jeder Punkt auf der negativen reellen Achse ist Unstetigkeitsstelle.

Satz 2.29. $\text{Log}(w)$ ist eine holomorphe Funktion auf der geschlitzten Ebene

$$D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Die Ableitung ist

$$\frac{d}{dw} \text{Log}(w) = \frac{1}{w}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass Log auf D tatsächlich stetig ist. Sei $w_0 \in D$ fest. Wir schreiben

$$\text{Log}(w_0) = z_0 = x_0 + iy_0.$$

Dann ist $y_0 = \text{Arg}(w_0) \in (-\pi, \pi)$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt und

$$K := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x - x_0| \leq \log(2), |y| \leq \pi, |z - z_0| \geq \varepsilon\}.$$

Dann ist K abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und die stetige Funktion

$$z \mapsto |e^z - e^{z_0}| \in \mathbb{R}$$

nimmt auf K ein Minimum an, etwa ρ . Das Minimum ist $\neq 0$, da K nach Konstruktion keine Elemente z von der Form $z_0 + 2\pi in$ ($n \in \mathbb{Z}$) enthält. Sei $\delta := \min(\rho, e^{x_0/2})$. Für diese Wahl von δ gilt dann

$$w \in D, |w - w_0| < \delta \Leftrightarrow |\text{Log}(w) - \text{Log}(w_0)| < \varepsilon,$$

denn: sei $z = \text{Log}(w) = x + iy$. Dann ist $|y| = |\text{Arg}(w)| < \pi$. Außerdem gilt $|x - x_0| < \log(2)$: sonst wäre

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{x_0} &> \delta > |w - w_0| \\ &\geq \left| |w| - |w_0| \right| \\ &= |e^x - e^{x_0}| \\ &> \begin{cases} e^{x_0+\log(2)} - e^{x_0} : & x - x_0 > \log(2); \\ e^{x_0} - e^{x_0-\log(2)} : & x_0 - x > \log(2); \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{x_0} : & x - x_0 > \log(2); \\ \frac{1}{2}e^{x_0} : & x_0 - x > \log(2); \end{cases} \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung sei $(w_n)_n$ eine Folge in $D \setminus \{w_0\}$, die gegen w_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit von Log haben wir die Konvergenz

$$z_n := \text{Log}(w_n) \longrightarrow \text{Log}(w_0) = z_0.$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0} &= \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{\left. \frac{d}{dz} \right|_{z=z_0} \exp(z)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\exp(z_n) - \exp(z_0)}{z_n - z_0}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_0}{\exp(z_n) - \exp(z_0)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(w_n) - \text{Log}(w_0)}{w_n - w_0}. \end{aligned}$$

□

3. Das komplexe Integral

3.1. Komplexe Wegintegrale

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $a < b$. Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion,

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad \text{mit } \varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man nennt φ stetig bzw. differenzierbar bzw. stetig differenzierbar, wenn das auf φ_1 und φ_2 zutrifft. Falls φ differenzierbar ist, definiert man

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t).$$

(Dabei heißt φ_i , $i = 1, 2$ in den Endpunkten a, b differenzierbar, wenn die einseitigen Limiten

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(a)}{x - a}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(b)}{x - b}$$

existieren.)

Bemerkung 3.1. Für diesen Begriff gelten die folgenden Rechenregeln. Seien $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi$ und $\lambda\varphi$ sind differenzierbar und

$$(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi', \quad (\varphi \cdot \psi)' = \varphi' \psi + \varphi \psi', \quad (\lambda\varphi)' = \lambda\varphi'.$$

(ii) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Angenommen, $\varphi(I) \subseteq D$. Dann ist die Komposition

$$f \circ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$$

differenzierbar und

$$(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Beweis. (i) Nachrechnen.

(ii) Man schreibe $f = u + iv$ und $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Dann gilt

$$f \circ \varphi(t) = u(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + iv(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Nach dem Kettenregel für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist $f \circ \varphi$ differenzierbar, und

$$\begin{aligned}
& (f \circ \varphi)'(t) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} u(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) + \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \right) \\
&\quad + i \left(\frac{\partial}{\partial x} v(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) + \frac{\partial}{\partial y} v(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} u + i \frac{\partial}{\partial x} v \right) (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \cdot (\varphi_1'(t) + i \varphi_2'(t)) \\
&= f'(\varphi(t)) \varphi'(t).
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir die Cauchy–Riemann-Gleichungen eingesetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

□

Definition 3.2. Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $a \leq b$. Sei $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ($\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$). Man definiert

$$\int_a^b \varphi(t) dt := \left(\int_a^b \varphi_1(t) dt \right) + i \left(\int_a^b \varphi_2(t) dt \right).$$

Das Integral hat die folgenden Eigenschaften:

Lemma 3.3. (i) Seien $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_a^b (\varphi(t) + \lambda \psi(t)) dt = \int_a^b \varphi(t) dt + \lambda \int_a^b \psi(t) dt.$$

(ii) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Abbildung

$$t \mapsto \int_a^t \varphi(u) du$$

stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} \int_a^t \varphi(u) du = \varphi(t).$$

(iii) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

(iv) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt (Standardabschätzung)

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Beweis. (i) Nachrechnen.

(ii), (iii) Man schreibt $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ und verwendet den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die reellwertigen Funktionen φ_1, φ_2 .

(iv) Sei o.B.d.A. $I := |\int_a^b \varphi(t) dt| \neq 0$ (im Fall $I = 0$ gibt es nichts zu beweisen). Dann hat das Integral die Form

$$\int_a^b \varphi(t) dt = Ie^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} I &= e^{-i\theta} \int_a^b \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} \varphi(t)] dt + i \underbrace{\int_a^b \operatorname{Im}[e^{-i\theta} \varphi(t)] dt}_{=0, \text{ da } I \in \mathbb{R}} \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} \varphi(t)] dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} \varphi(t)| dt \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

□

Man verwendet hier oft eine andere Denk- und Schreibweise:

Eine stetige Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ **durchläuft** eine (stetige) **Kurve** oder einen **Weg** $C \subseteq \mathbb{C}$ vom Anfangspunkt $\varphi(a)$ nach Endpunkt $\varphi(b)$ in der komplexen Ebene. Man sagt auch: die Kurve C wird durch $\varphi(t)$ **parametrisiert**. Die Stetigkeit von φ wird dabei immer (evtl. stillschweigend) angenommen.

Des Weiteren nennen wir C **differenzierbar** bzw. **stetig differenzierbar**, wenn φ die jeweilige Eigenschaft hat. Zur Abkürzung nennen wir eine stetig differenzierbare Kurve C **glatt**¹.

Die Kurve C heißt **geschlossen**, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$ gilt.

Wir setzen hier nicht voraus, dass φ injektiv ist! Unter anderem kann φ die Kurve sogar mehrfach durchlaufen.

¹In der Definition einer glatten Kurve verlangt man oft außerdem, dass $\varphi'(t)$ nirgendwo verschwindet. Das spielt hier aber keine Rolle.

Beispiel 3.4. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann ist die Kreislinie um a vom Radius r eine geschlossene Kurve mit der Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = a + re^{it}.$$

Definition 3.5. (i) Sei C eine Kurve mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow C$. Mit $-C$ bezeichnet man die rückwärts durchlaufene Kurve, mit Parametrisierung $\varphi(-t)$, $t \in [-b, -a]$.

(ii) Seien C_j , $j = 1, \dots, n$ Kurven mit Parametrisierungen $\varphi_j : [a_j, a_{j+1}]$ derart, dass $\varphi_j(a_{j+1}) = \varphi_{j+1}(a_{j+1})$ für jedes j gilt. Mit $C = C_1 + \dots + C_n$ bezeichnen wir die Kurve mit Parametrisierung

$$\varphi : [a_1, a_{n+1}] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = \varphi_j(t) \text{ falls } t \in [a_j, a_{j+1}].$$

(iii) Eine Kurve C heißt **stückweise glatt**, falls C eine Darstellung

$$C = C_1 + \dots + C_n$$

mit glatten Kurven C_j besitzt.

Das Hauptziel in diesem Abschnitt ist das Integrieren einer Funktion entlang einer Kurve:

$$\int_C f(z) dz.$$

Sei dazu $\varphi : [a, b] \rightarrow C$ die Parametrisierung. Wir substituieren formal $z = \varphi(t)$ und $dz = d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} dt$. Das führt zu der folgenden Definition:

Definition 3.6. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C \subseteq D$ eine glatte Kurve mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow C$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die entlang C stetig ist. Das **Kurvenintegral** von f entlang C ist

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Ist allgemeiner C nur stückweise glatt, $C = C_1 + \dots + C_n$, dann definiert man

$$\int_C f(z) dz := \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

Beispiel 3.7. Sei C der einfach durchlaufene Einheitskreis, mit Parametrisierung

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow C, \quad \varphi(t) = e^{2\pi it},$$

und $n \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen das Integral $\int_C z^n dz$:

$$\begin{aligned}\int_C z^n dz &= \int_0^1 \varphi(t)^n \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i n t} \cdot 2\pi i e^{2\pi i t} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t} dt.\end{aligned}$$

Für $n \neq -1$ hat $e^{2\pi i(n+1)t}$ die Stammfunktion $F(t) = \frac{1}{2\pi i(n+1)} e^{2\pi i(n+1)t}$ mit $F(1) = F(0)$. Also gilt

$$\int_C z^n dz = 2\pi i (F(1) - F(0)) = 0, \quad n \neq -1.$$

Im Fall $n = -1$ ist

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \int_0^1 1 dt = 2\pi i.$$

Lemma 3.8. (i) Das Kurvenintegral $\int_C f(z) dz$ entlang einer glatten Kurve C hängt nicht von der Parametrisierung ab. Das heißt: sei $\varphi : [a, b] \rightarrow C$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung von C , und $t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $t(\alpha) = a$ und $t(\beta) = b$. Für $\psi = \varphi \circ t : [\alpha, \beta] \rightarrow C$ gilt dann

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(x)) \psi'(x) dx.$$

(ii) Es gilt

$$\int_{-C} f(t) dt = - \int_C f(t) dt.$$

Beweis. (i) Man benutze die Substitutionsregel der reellen Analysis. Für das Realteil $u = \operatorname{Re}[f]$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b u(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} u(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta u(\varphi(t(x))) \varphi'(t(x)) t'(x) dx \\ &= \int_\alpha^\beta u(\psi(x)) \psi'(x) dx.\end{aligned}$$

Für das Imaginärteil $v = \operatorname{Im}[f]$ analog.

(ii) Falls C glatt ist, mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow C$, ist $-C$ durch $\varphi(-t)$,

$-b \leq t \leq -a$ parametrisiert. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(z) \, dz &= \int_{-b}^{-a} f(\varphi(-t))(-\varphi'(-t)) \, dt \\ &= \int_b^a f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt \quad (t \mapsto -t) \\ &= - \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt \\ &= - \int_C f(z) \, dz.\end{aligned}$$

Für eine stückweise glatte Kurve $C = C_1 + \dots + C_n$ hat man

$$-C = (-C_n) + \dots + (-C_1),$$

also

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(z) \, dz &= \int_{-C_n} f(z) \, dz + \dots + \int_{-C_1} f(z) \, dz \\ &= - \int_{C_n} f(z) \, dz - \dots - \int_{C_1} f(z) \, dz = - \int_C f(z) \, dz. \quad \square\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral besitzt eine Interpretation als Limes von Riemann-Summen. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow C$ eine stückweise glatte Kurve und f eine auf C stetige Funktion. Die Feinheit einer Zerlegung $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Intervalls ist $|\Delta| = \max |t_j - t_{j-1}|$. Seien $a_j \in (t_{j-1}, t_j)$ beliebige Punkte. Man definiere $z_j = \varphi(t_j) \in C$ und $\zeta_j = \varphi(a_j) \in C$ und die Riemann-Summe

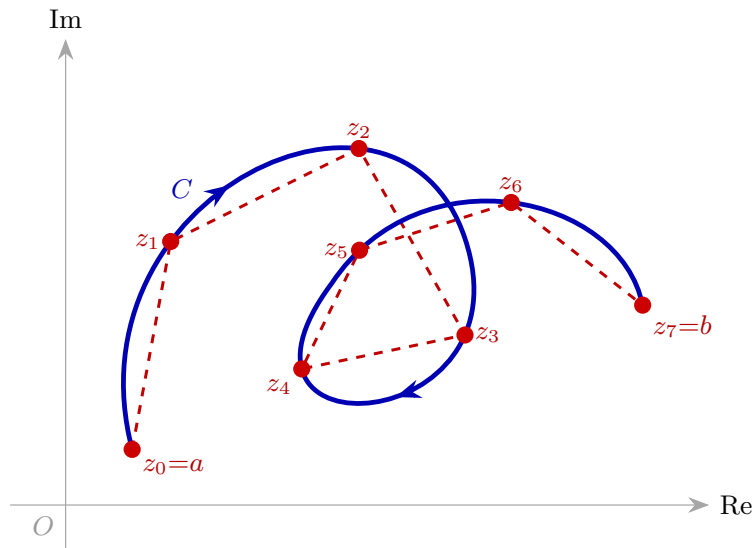
$$S(\Delta, a_1, \dots, a_n) := \sum_{j=1}^n (z_j - z_{j-1}) f(\zeta_j).$$

In dieser Situation gilt:

Proposition 3.9. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle Zerlegungen der Feinheit $|\Delta| < \delta$ und alle Punkte $a_j \in (t_{j-1}, t_j)$ gilt*

$$\left| S(\Delta, a_1, \dots, a_n) - \int_C f(z) \, dz \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für eine glatte Kurve zu beweisen. O.B.d.A. sei φ stetig differenzierbar.



Figur 3.1: Approximation an eine Kurve.

Nach Definition des Riemann-Integrals ist

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

der Limes über $|\Delta| \rightarrow 0$ der Riemann-Summen

$$R(\Delta, a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n f(\varphi(a_j)) \varphi'(a_j) (t_j - t_{j-1}).$$

Es genügt also zu zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $|\Delta| < \delta$ und alle a_j gilt:

$$|S(\Delta, a_1, \dots, a_n) - R(\Delta, a_1, \dots, a_n)| \leq \varepsilon.$$

Sei dazu

$$M := \sup_{a \leq t \leq b} |f(\varphi(t))|;$$

dann ist $M < \infty$, da $f \circ \varphi$ stetig ist. Wir haben

$$\begin{aligned}
|S(\Delta, a_1, \dots, a_n) - R(\Delta, a_1, \dots, a_n)| &\leq \sum_{j=1}^n \left| f(\varphi(a_j))\varphi'(a_j)(t_j - t_{j-1}) - f(\varphi(a_j))(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) \right| \\
&\leq M \cdot \sum_{j=1}^n \left| \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) - \varphi'(a_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \\
&= M \cdot \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) - \varphi'(a_j) dt \right| \\
&\leq M \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t) - \varphi'(a_j)| dt.
\end{aligned}$$

Da φ stetig differenzierbar ist, ist φ' auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Also kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wählen, sodass

$$|x - y| < \delta \implies |\varphi'(x) - \varphi'(y)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

Falls $|\Delta| < \delta$, gilt also

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t) - \varphi'(a_j)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)}(t_j - t_{j-1})$$

und damit

$$|S(\Delta, a_1, \dots, a_n) - R(\Delta, a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon. \quad \square$$

Bemerkung 3.10. Das komplexe Kurvenintegral enthält das reelle Integral als Spezialfall. Reelle Intervalle $C = [a, b]$ sind nämlich auch Kurven, bzgl. der Parametrisierung

$$\varphi : [a, b] \rightarrow C, \quad \varphi(t) = t,$$

und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_C f(z) dz.$$

Definition 3.11. (i) Sei C eine glatte Kurve mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow C$. Die **Länge** der Kurve definiert man durch

$$\ell(C) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

(ii) Für eine stückweise glatte Kurve $C = C_1 + \dots + C_n$ definiert man die Länge durch

$$\ell(C) := \ell(C_1) + \dots + \ell(C_n).$$

Die Länge $\ell(C)$ hängt nicht von der Parametrisierung ab, und es gilt

$$\ell(-C) = \ell(C).$$

Dazu argumentiert man wie im Beweis von Lemma 3.8.

Wird die glatte Kurve C einfach durchlaufen, dann ist $\ell(C)$ die Bogenlänge von C im Sinne der reellen Analysis in $\mathbb{R}^2$. Ist z.B. C der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung $y = y(t)$, d.h.

$$\varphi(t) = (t, y(t)) = t + iy(t), \quad a \leq t \leq b,$$

dann ist $|\varphi'(t)| = \sqrt{1 + (y'(t))^2}$ und

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$$

ist die Länge des Graphes.

Beispiel 3.12. (i) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und C der Geradenabschnitt von z nach w , d.h.

$$\varphi(t) = (1 - t)z + tw, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dann ist $\varphi'(t) = w - z$ und

$$\ell(C) = \int_0^1 |\varphi'(t)| dt = \int_0^1 |w - z| dt = |w - z|.$$

(ii) Sei C der k -fach durchlaufene Einheitskreis:

$$\varphi(t) = e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq k.$$

Dann ist $\varphi'(t) = 2\pi i e^{2\pi it}$ und

$$\ell(C) = \int_0^k |2\pi i e^{2\pi it}| dt = \int_0^k 2\pi dt = 2\pi k.$$

Lemma 3.13 (Standardabschätzung). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C \subseteq D$ eine stückweise glatte Kurve. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf C stetig. Dann gilt die Abschätzung*

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \ell(C) \cdot \sup_{z \in C} |f(z)|.$$

Beweis. Sei $M = \sup_{z \in C} |f(z)|$. Falls C glatt ist, mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow C$, dann rechnet man

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) \, dz \right| &= \left| \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\varphi(t)) \varphi'(t)| \, dt \\ &\leq \int_a^b M |\varphi'(t)| \, dt = M \cdot \ell(C). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall $C = C_1 + \dots + C_n$, C_i glatt, ist

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) \, dz \right| &= \left| \sum_j \int_{C_j} f(z) \, dz \right| \\ &\leq \sum_j \left| \int_{C_j} f(z) \, dz \right| \\ &\leq \sum_j \ell(C_j) \sup_{z \in C_j} |f(z)| \\ &\leq \sum_j \ell(C_j) \sup_{z \in C} |f(z)| = \ell(C) \cdot \sup_{z \in C} |f(z)|. \end{aligned} \quad \square$$

Zur Berechnung konkreter Kurvenintegrale kann man Stammfunktionen verwenden, wenn diese existieren.

Satz 3.14. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $C \subseteq D$ eine stückweise glatte Kurve, die ganz in D enthalten ist, mit Anfangspunkt z und Endpunkt w . Dann gilt*

$$\int_C F'(z) \, dz = F(w) - F(z).$$

Insbesondere hängt $\int_C F'(z) \, dz$ nur von den Endpunkten von C ab!

Beweis. Sei zunächst C glatt mit Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow C$. Dann gilt

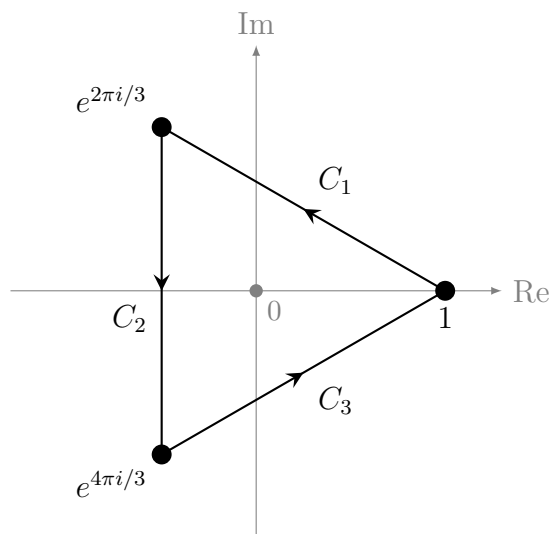
$$\begin{aligned} \int_C F'(z) \, dz &= \int_a^b F'(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(F(\varphi(t)) \right) \, dt \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F(w) - F(z). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall sei $C = C_1 + \dots + C_n$, C_j glatt mit Anfangspunkt z_j und Endpunkt w_j . (Insbesondere ist $w_j = z_{j+1}$ für $j < n$.) Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_C F'(z) \, dz &= \sum_{j=1}^n \int_{C_j} F'(z) \, dz \\ &= \sum_{j=1}^n \left(F(w_j) - F(z_j) \right) \\ &= F(z_2) - F(z_1) + \sum_{j=2}^{n-1} F(z_{j+1}) - F(z_j) + F(w) - F(z_n) \\ &= F(w) - F(z). \quad (\text{Teleskopsumme}) \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.15. Sei $C = C_1 + C_2 + C_3$ das positiv orientierte, einfach durchlaufene Dreieck mit Eckpunkten $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$, mit Anfang und Ende in 1.



Wir berechnen das Integral

$$\int_C z^n \, dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n \neq -1$ hat z^n auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Stammfunktion $\frac{z^{n+1}}{n+1}$. Da Anfangs- und Endpunkt gleich sind, hat man nach Satz 3.14

$$\int_C z^n dz = 0, \quad n \neq -1.$$

Auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ hat z^{-1} die Stammfunktion $\text{Log}(z)$. Da die Seiten C_1, C_3 in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ enthalten sind, gilt:

$$\int_{C_1} z^{-1} dz = \text{Log}(e^{2\pi i/3}) - \text{Log}(1) = \frac{2\pi i}{3} - 0 = \frac{2\pi i}{3},$$

$$\int_{C_3} z^{-1} dz = \text{Log}(1) - \text{Log}(e^{4\pi i/3}) = 0 - \left(-\frac{2\pi i}{3}\right) = \frac{2\pi i}{3}.$$

Auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ findet man dagegen die Stammfunktion $\text{Log}(-z)$. Da C_2 ganz in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ enthalten ist, gilt:

$$\int_{C_2} z^{-1} dz = \text{Log}(-e^{4\pi i/3}) - \text{Log}(-e^{2\pi i/3}) = \frac{\pi i}{3} - \left(-\frac{\pi i}{3}\right) = \frac{2\pi i}{3}.$$

Insgesamt ist

$$\int_C z^{-1} dz = \int_{C_1} z^{-1} dz + \int_{C_2} z^{-1} dz + \int_{C_3} z^{-1} dz = 2\pi i.$$

Da $\int_C z^{-1} dz \neq 0$, kann z^{-1} keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzen!

3.2. Der Cauchysche Integralsatz

Der Cauchysche Integralsatz ist der Hauptsatz der Funktionentheorie. Er besagt, dass Integrale

$$\int_C f(z) dz$$

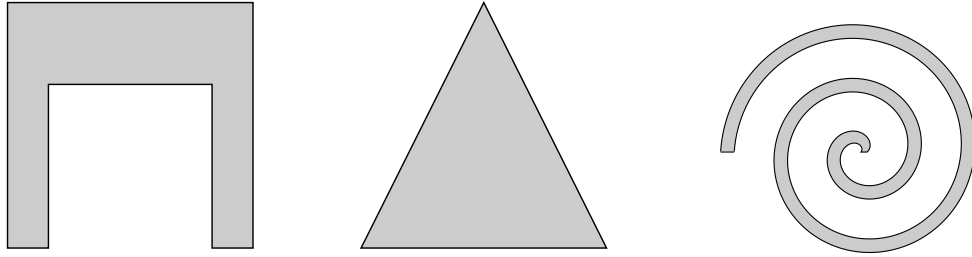
holomorpher Funktionen entlang geschlossenen Kurven stets 0 ergeben, solange das “Innere” der Kurve C ganz im Definitionsbereich von f liegt. Dass im Beispiel 3.15 $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ gilt, liegt also letzten Endes nur daran, dass der Punkt 0 im Inneren des Dreiecks liegt und die zu integrierende Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ dort nicht definiert ist. Viele weitere Sätze folgen aus diesem Prinzip.

Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow C \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene **Jordan-Kurve**. Das heißt, φ hat keine Selbstüberschneidungen: $\varphi(a) = \varphi(b)$ aber $\varphi : [a, b) \rightarrow C$ ist injektiv. Nach dem Jordanschen Kurvensatz² zerfällt das Komplement $\mathbb{C} \setminus C$ in zwei disjunkte Gebiete. Eines der Gebiete ist beschränkt (das *Innere* von C); das andere ist unbeschränkt (das *Äußere* von C).

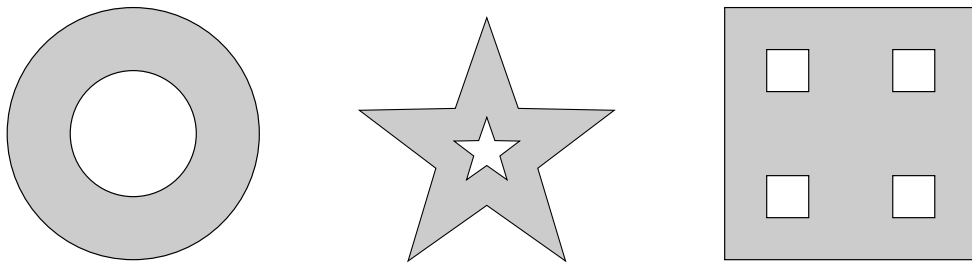
²Ein unscheinbarer aber sehr tiefliegender Satz; vgl. Theorem 63.4 von Munkres’ *Topology* (2nd ed.) Für (stückweise) glatte Kurven ist der Beweis viel einfacher. Wir gehen aber nicht darauf ein.

Definition 3.16. Ein Gebiet $E \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Elementargebiet**, oder **einfach zusammenhängend**, wenn für jede geschlossene Jordan-Kurve $C \subseteq E$ das Innere von C ganz in E enthalten ist.

Anschaulich ist ein Elementargebiet ein Gebiet ohne Löcher.



Figur 3.2: Elementargebiete



Figur 3.3: Keine Elementargebiete

Beispiel 3.17. (i) Das Innere einer geschlossenen Jordan-Kurve ist immer ein Elementargebiet. Unter anderem sind Kreise, Dreiecke, Rechtecke,... Beispiele für Elementargebiete.
(ii) $\mathbb{C}$ ist ein Elementargebiet. Die Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}[z] > 0\}$ ist ein Elementargebiet. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist ein Elementargebiet.
(iii) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist **kein** Elementargebiet. Der Einheitskreis $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(t) = e^{2\pi it}$ hat als Innere die offene Kreisscheibe $\{z : |z| < 1\}$, die nicht mehr in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ enthalten ist.

Satz 3.18 (Cauchyscher Integralsatz). Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für jede geschlossene stückweise glatte Kurve $C \subseteq E$ gilt

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Der Beweis des Integralsatzes ist etwas länger und erfolgt in drei Schritten. Zunächst ist C ein Dreieck (Lemma von Goursat). Im zweiten Schritt ist C ein Polygonzug; das Integral bestimmen wir durch eine geeignete Triangulierung. Die allgemeine Behauptung reduzieren wir auf Integrale entlang Polygonzügen, indem wir das Kurvenintegral durch

Riemann-Summen approximieren.

Zu $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ definieren wir die offene Dreiecksfläche

$$\Delta = \Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 : t_1, t_2, t_3 > 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$

Motivation: sei z_* ein Punkt auf dem Geradenabschnitt zwischen z_2 und z_3 ,

$$z_* = (1 - s)z_2 + sz_3, \quad 0 < s < 1.$$

Dann sind die Punkte auf dem Weg von z_1 nach z_* genau von der Form

$$z = (1 - t)z_1 + tz_* = (1 - t)z_1 + t(1 - s)z_2 + tsz_3.$$

Mit $t_1 = 1 - t$, $t_2 = t(1 - s)$, $t_3 = ts$ hat man $t_1, t_2, t_3 > 0$ und

$$t_1 + t_2 + t_3 = (1 - t) + t(1 - s) + ts = (1 - t) + t = 1.$$

Auf dieser Weise bekommt man jeden Punkt $z \in \Delta$.

Sei C der Rand von Δ . Formal ist $C = C_1 + C_2 + C_3$, wobei

$$C_1 : (1 - t)z_1 + tz_2, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$C_2 : (2 - t)z_2 + (t - 1)z_3, \quad 1 \leq t \leq 2;$$

$$C_3 : (3 - t)z_3 + (t - 2)z_1, \quad 2 \leq t \leq 3;$$

die geraden Strecken von z_1 nach z_2 , von z_2 nach z_3 , und von z_3 nach z_1 durchlaufen.

Satz 3.19 (Lemma von Goursat). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\bar{D} \subseteq D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

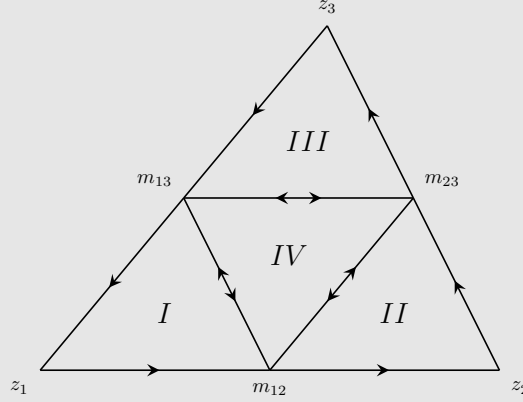
$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Beweis. Falls z_1, z_2, z_3 auf einer Geraden liegen, besteht der gesamte Integrationsweg aus Geradenabschnitten, die einmal vorwärts und einmal rückwärts durchlaufen werden. Diese Integrale heben sich nach Lemma 3.8(ii) gegenseitig auf. Im Folgenden schließen wir das aus: wir nehmen an, dass z_1, z_2, z_3 tatsächlich ein Dreieck bilden.

Man verbinde die Mittelpunkte der Kanten von Δ durch Geradenstücke. Auf dieser Weise wird Δ in vier Dreiecksflächen geteilt: sind $m_{ij} = m_{ji}$ die Mittelpunkte der Strecken von z_i nach z_j , so definieren wir

$$\Delta_I = \Delta_{z_1, m_{12}, m_{13}}, \quad \Delta_{II} = \Delta_{z_2, m_{23}, m_{12}}, \quad \Delta_{III} = \Delta_{z_3, m_{13}, m_{23}}, \quad \Delta_{IV} = \Delta_{m_{12}, m_{23}, m_{13}}.$$

Seien $C_I, C_{II}, C_{III}, C_{IV}$ jeweils die orientierten Ränder von $\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}, \Delta_{IV}$. Die Aufteilung ist dann so konstruiert, dass die Seiten von C_{IV} unter den Seiten von C_I, C_{II}, C_{III} vorkommen, aber mit der umgekehrten Orientierung.



Figur 3.4: Zerlegung von Δ in vier Teildreiecke

Damit haben wir

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_I} f(z) dz + \int_{C_{II}} f(z) dz + \int_{C_{III}} f(z) dz + \int_{C_{IV}} f(z) dz.$$

Sei $C_1 \in \{C_I, C_{II}, C_{III}, C_{IV}\}$ so ausgewählt, dass $\left| \int_{C_1} f(z) dz \right|$ unter den Beträgen der vier Teilintegrale maximal ist. Dann haben wir

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|.$$

Sei außerdem $\Delta_1 \in \{\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}, \Delta_{IV}\}$ die Dreiecksfläche mit Rand C_1 .

Das Dreieck Δ_1 kann man auf genau dieser Weise unterteilen. Man erhält dann eine Dreiecksfläche $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$ mit Rand C_2 , für die die Abschätzung

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{C_2} f(z) dz \right|$$

gilt. Per Induktion bekommen wir eine absteigende Kette offener Dreiecksflächen $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots$ mit Rändern $C, C_1, C_2, \dots$ und

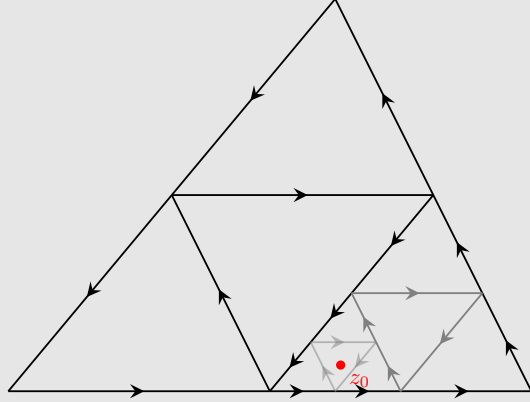
$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{C_n} f(z) dz \right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man bekommt auf dieser Weise eine Schachtelung kompakter Mengen $\overline{\Delta} \supseteq \overline{\Delta_1} \supseteq \overline{\Delta_2} \supseteq \dots$, deren Durchmesser

$$\text{diam}(\Delta_n) = \sup_{z, w \in \Delta_n} |z - w|$$

gegen 0 konvergiert. Da jeder endliche Durchschnitt der geschlossenen Mengen $\overline{\Delta_n}$ nichtleer ist, ist der gesamte Durchschnitt nichtleer; da aber der Durchmesser von $\overline{\Delta_n}$ beliebig klein wird, besteht der Durchschnitt aus einem einzigen Punkt z_0 :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta_n} = \{z_0\}.$$



Figur 3.5: Einschnürung von $z_0 \in D$ durch Dreiecke

f ist in z_0 komplex differenzierbar, denn $z_0 \in \overline{\Delta} \subseteq D$. Also existiert eine in z_0 stetige Abbildung $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0), \quad z \in D,$$

und zwar $\varphi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ($z \neq z_0$) und $\varphi(z_0) = f'(z_0)$. Mit f ist φ auf ganz D stetig.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$z \in D, |z - z_0| < \delta \implies |\varphi(z) - f'(z_0)| = |\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \varepsilon.$$

Man wähle n so groß, dass $|z - z_0| < \delta$ für jedes $z \in \overline{\Delta_n}$. Das Integral über $C_n \subseteq \overline{\Delta_n}$ wird jetzt in drei aufgeteilt: aus

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)$$

folgt

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} f(z_0) dz + \int_{C_n} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{C_n} (\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0) dz.$$

Für $f(z_0)$ (konstante Funktion) und $f'(z_0)(z - z_0)$ (Polynom) existieren Stammfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$. Da C_n abgeschlossen ist, sind die Integrale 0. Also ist

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} (\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0) dz.$$

Aus

$$z \in C_n \implies |z - z_0| < \delta \implies |\varphi(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$$

bekommt man mit der Standardabschätzung:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_n} f(z) \, dz \right| &\leq \int_{C_n} |\varphi(z) - f'(z_0)| |z - z_0| \, dz \\
 &< \varepsilon \int_{C_n} |z - z_0| \, dz \\
 &\leq \varepsilon \ell(C_n) \cdot \sup_{z \in C_n} |z - z_0| \\
 &\leq \varepsilon \ell(C_n)^2.
 \end{aligned}$$

Nach Konstruktion hat C_n die halben Seitenlängen und damit die halbe Gesamtlänge wie C_{n-1} , für jedes n . Das führt zu

$$\ell(C_n) = 2^{-n} \ell(C).$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned}
 \left| \int_C f(z) \, dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{C_n} f(z) \, dz \right| \\
 &\leq 4^n \varepsilon \cdot \ell(C_n)^2 \\
 &= \varepsilon \cdot \ell(C)^2.
 \end{aligned}$$

Weil das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\int_C f(z) \, dz = 0$.

□

Jetzt wird der Integrationsweg von einem Dreieck auf ein Polygon verallgemeinert. Das Argument ist rein geometrisch und führt zu keinen funktionentheorie relevanten Erkenntnissen. Der Beweis kann übersprungen werden.

Lemma 3.20 (Cauchyscher Integralsatz für Polygonzüge). *Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Seien $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = z_0 \in E$, $n \geq 3$ Punkte derart gegeben, dass das Geradenstück C_j zwischen z_{j-1} und z_j ($j = 1, \dots, n$) ganz in E liegt, und sei C der geschlossene Polygonzug*

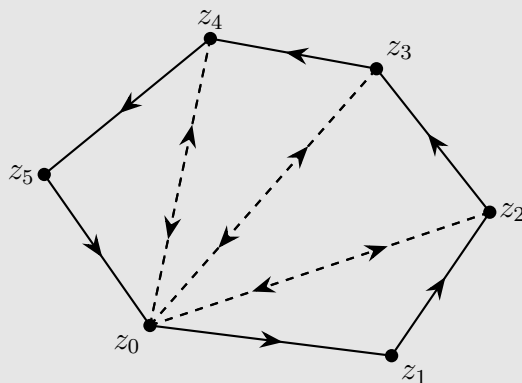
$$C = C_1 + \dots + C_n.$$

Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_C f(z) \, dz = 0.$$

Beweis. (i) Wir nehmen zunächst an, dass das Polygon konvex ist. Das heißt: der Weg C überschneidet sich nicht und alle Geradenstücke, die zwei Eckpunkte z_j, z_k verbinden,

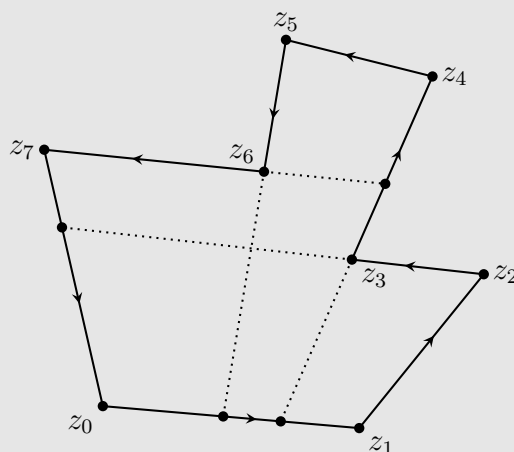
liegen im Inneren von C . Dann unterteilen wir das Polygon in $(n - 2)$ Dreiecke, indem wir alle Eckpunkte z_j , $2 \leq j \leq n - 2$ mit z_0 verbinden. Dabei heben sich die Integrale entlang den Geraden von z_j nach z_0 und zurück auf.



Das Integral teilt sich als Summe von Integralen über Dreiecksrändern $C_{z_0, z_j, z_{j+1}}$ auf, die alle verschwinden:

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_{z_0, z_1, z_2}} f(z) dz + \int_{C_{z_0, z_2, z_3}} f(z) dz + \dots + \int_{C_{z_0, z_{n-2}, z_{n-1}}} f(z) dz = 0.$$

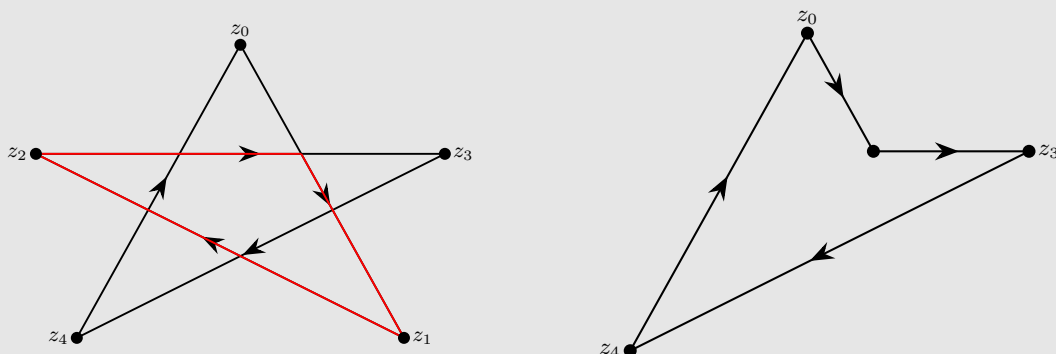
(ii) Das Polygon sei nicht mehr konvex, aber immer noch einfach (d.h. C ist eine Jordan-Kurve). Dann existieren Eckpunkte mit Innenwinkel $> \pi$. Die Seiten C_i , die dort enden, setzen sich zu Geraden fort, die das Innere von C schneiden. Wir setzen alle solche Seiten immer fort, bis sie C wieder schneiden, und erhalten eine Unterteilung in *konvexe* einfache Polygone.



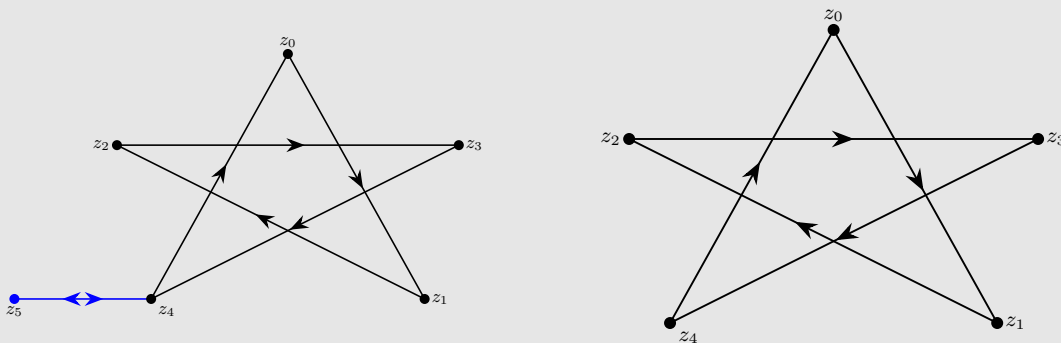
Das Integral $\int_C f(z) dz$ teilt sich als Summe von Integralen entlang konvexen Polygonzügen auf, die nach (i) alle 0 ergeben.

(iii) Im allgemeinen Fall hat das Polygon Selbstüberschneidungen. Man fahre entlang C bis einer der folgenden Situationen auftritt:

Fall 1: Ein Punkt wird zum zweiten Mal getroffen. Wenn es einen ersten solchen Punkt P gibt, dann bildet die Teilkurve zwischen dem ersten und dem zweiten Treffen mit P ein einfaches Polygon. (In der Abbildung ist das das rote Dreieck.) Nach (ii) ist das Integral $\int f(z) dz$ entlang diesem Polygon 0. Wir dürfen es also entfernen, ohne dabei das Integral zu verändern.



Fall 2: Man fährt entlang einem Zweieck, d.h. vorwärts und sofort danach rückwärts entlang einem Geradenabschnitt. (In der Abbildung ist das die blaue Strecke.) In diesem Fall gibt es keinen ersten Punkt, der zweimal getroffen wird. Die Strecke kann vom Polygon entfernt werden, ohne das Integral zu verändern.



Nach endlich vielen solchen Schritten entsteht ein einfaches Polygon. Nach (ii) ist das Integral 0. $\square$

Beweis. [Beweis des Cauchyschen Integralsatzes] Sei E ein Elementargebiet, $C \subseteq E$ eine geschlossene (stückweise glatte) Kurve und $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist C kompakt und $\mathbb{C} \setminus E$ abgeschlossen und disjunkt zu C . Der Abstand

$$d = \text{dist}(C, \mathbb{C} \setminus E) = \inf\{|z - w| : z \in C, w \in \mathbb{C} \setminus E\} > 0$$

ist also positiv. Sei K die kompakte Teilmenge

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, C) \leq \frac{1}{2}d \right\} \subseteq E.$$

Für jede Zerlegung der Kurve $z_0, \dots, z_n \in C$ mit $|z_j - z_{j+1}| < \frac{d}{2} \forall j$ liegt der Polygonzug durch $z_0, \dots, z_n$ ganz in K .

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f auf K gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta_f > 0$ sodass

$$z, w \in K, |z - w| < \delta_f \implies |f(z) - f(w)| < \frac{1}{2\ell(C)}\varepsilon.$$

Sei außerdem $0 < \delta < \min(\delta_f, d/2)$ so klein, dass

$$\left| \int_C f(z) dz - \sum_{j=1}^n f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

für jede Zerlegung der Kurve mit Feinheit $|z_j - z_{j+1}| < \delta$. Für den Polygonzug P durch $z_0, \dots, z_n$ gilt aber

$$\begin{aligned} \left| \int_P f(z) dz - \sum_{j=1}^n f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} f(z_j) dz \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} |f(z) - f(z_j)| dz \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{1}{2\ell(C)}\varepsilon \\ &= \frac{\ell(P)}{\ell(C)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt aber $\int_P f(z) dz = 0$ nach Lemma 3.20. Insgesamt haben wir

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \left| \int_C f(z) dz - \sum_{j=1}^n f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \right| + \left| \sum_{j=1}^n f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Weil das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\int_C f(z) dz = 0$. □

Korollar 3.21. *Sei E ein Elementargebiet. Jede holomorphe Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion: eine holomorphe Funktion $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$.*

Beweis. Sei $z_0 \in E$ beliebig. Man definiere

$$F(z) := \int_C f(w) dw.$$

Dabei ist C ein beliebiger Pfad in E mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z . Das ist wohldefiniert (unabhängig von der Wahl von C), denn: sind C_1, C_2 zwei solche Pfade in

E , dann ist $C = C_1 + (-C_2)$ ein geschlossener Weg. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$0 = \int_C f(w) \, dw = \int_{C_1} f(w) \, dw + \int_{-C_2} f(w) \, dw = \int_{C_1} f(w) \, dw - \int_{C_2} f(w) \, dw.$$

Wir zeigen, dass f die Ableitung von F ist. Sei $z \in E$ und sei $h \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass $z + th \in E$ für $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) \, dw = \int_0^1 f(z+th) \, dt.$$

Dabei ist $\int_z^{z+h}$ das Integral entlang der geraden Strecke von z nach $z+h$. Im Limes $h \rightarrow 0$ erhalten wir nach einem gerechtfertigten Vertauschen von Grenzwert und Integral

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z) \, dt = f(z). \quad \square$$

3.3. Die Cauchysche Integralformel

Definition 3.22. Sei D ein Gebiet. Ein **Cauchy-Integral** ist eine Funktion der Form

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{w-z} \, dw, \quad z \in D \setminus C.$$

Dabei ist $C \subseteq D$ eine (nicht unbedingt geschlossene) stückweise glatte Kurve in D und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf C stetige Funktion.

Proposition 3.23. Sei D ein Gebiet, $C \subseteq D$ eine stückweise glatte Kurve und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf C stetige Funktion. Dann definiert das Cauchy-Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{w-z} \, dw$$

eine auf $D \setminus C$ unendlich oft komplex differenzierbare Funktion. Die Ableitungen von $f(z)$ haben die Integraldarstellungen

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw.$$

(Mit anderen Worten: die Ableitungen von $f(z)$ ergeben sich durch Differenzieren unter dem Integralzeichen (Leibniz-Regel).)

Beweis. Wir verwenden Induktion nach n . Für $n = 0$ ist

$$f^{(0)}(z) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{w - z} dw.$$

Die Formel für die n te Ableitung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ so gewählt, dass D die abgeschlossene Kreisfläche $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ enthält. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{(w - z)^{n+1}} dw - \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C g(w) \cdot \frac{(w - z_0)^{n+1} - (w - z)^{n+1}}{(w - z_0)^{n+1}(w - z)^{n+1}} dw. \end{aligned}$$

Mit der Faktorisierung

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+1}(w - z)^{n+1}} \left((w - z_0)^n + (w - z_0)^{n-1}(w - z) + \dots + (w - z)^n \right) dw \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \sum_{j=0}^n \int_C \frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+1-j}(w - z)^{j+1}} dw. \end{aligned}$$

Da $\frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+1-j}(w - z)^{j+1}}$ im Bereich $w \in C$ und $|z - z_0| \leq r$ beschränkt ist, darf man das Integral mit dem Grenzprozess $z \rightarrow z_0$ vertauschen:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_C \frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+1-j}(w - z)^{j+1}} dw = \int_C \frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+2}} dw.$$

Wir bekommen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{(w - z_0)^{n+2}} dw,$$

d.h. Differenzierbarkeit von $f^{(n)}$ mit der behaupteten Formel für die $(n+1)$ -te Ableitung. $\square$

Satz 3.24 (Cauchysche Integralformel). Sei D ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $R > 0$ ein Radius, sodass D den abgeschlossenen Kreis

$$\{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| \leq R\}$$

enthält. Dann gilt

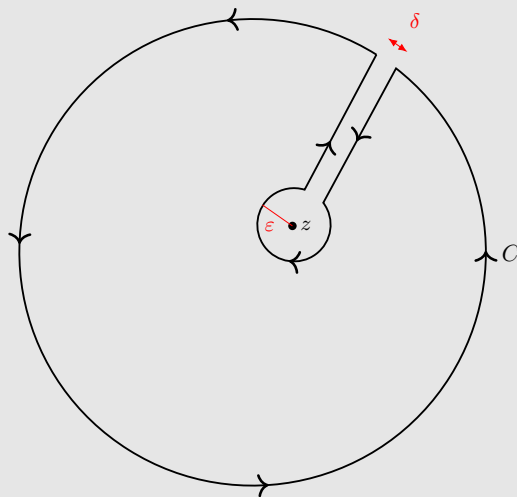
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

für $|z - z_0| < R$.

Dabei wird entlang dem Kreis $w = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ integriert. Hier muss z nicht der Kreismittelpunkt z_0 sein!

Die Werte $f(w)$ einer holomorphen Funktion auf dem Kreis $|w - z_0| = R$ bestimmen nach dieser Formel die Werte innerhalb des Kreises eindeutig. Das ist ein Spezialfall des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen.

Beweis. Seien $\delta, \varepsilon > 0$ hinreichend klein. Man definiere die sogenannte Schlüsselloch-Kurve $C = C_{\delta, \varepsilon}$ mit einem inneren Kreis um z von Radius ε und einem Loch der Breite δ .



Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Im Limes $\delta \rightarrow 0$ heben sich wegen der Stetigkeit von f die Integrale entlang den Geradenabschnitten gegenseitig auf. Man bekommt damit

$$0 = \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Das Integral entlang dem ε -Kreis schreiben wir um:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} + \frac{f(z)}{w-z}.$$

Die Funktion $\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ setzt sich zu einer auf ganz D stetigen Funktion fort:

$$\varphi(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} : & w \neq z; \\ f'(z) : & w = z. \end{cases}$$

Mit der Standardabschätzung bekommen wir

$$\left| \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw \right| \leq \left(\sup_{|w-z|=\varepsilon} \right) \cdot 2\pi\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{w-z} dw &= f(z) \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{1}{w-z} dw \\ &= f(z) \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt \quad (w = z + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi) \\ &= 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir

$$\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z). \quad \square$$

3.4. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

Satz 3.25. *Sei D ein Gebiet. Jede holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist unendlich oft komplex differenzierbar. Ist $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ so, dass D die abgeschlossene Umgebung $\{|w-z| \leq r\}$ enthält, dann ist $f^{(n)}(z)$ durch die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

gegeben.

Beweis. Nach Satz 3.24 besitzt $f(z)$ eine Darstellung als Cauchy-Integral entlang dem Kreis $|w - z| = r$. Proposition 3.23 gibt uns die unendlich ofte Differenzierbarkeit von $f(z)$, sowie die Formel für die Ableitungen. $\square$

Korollar 3.26 (Mittelwertprinzip). *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$. Sei f eine auf dem Kreis $|z - z_0| < R$ definierte holomorphe Funktion.*

(i) *Für jedes $0 < r < R$ gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

(ii) *Es gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R f(z_0 + re^{it}) r dr dt.$$

Das heißt: $f(z_0)$ ist der Durchschnitt der Werte von $f(z)$ auf jedem Kreis $|z - z_0| = r$, sowie der Durchschnitt der Werte von $f(z)$ in der Kreisscheibe $|z - z_0| < R$.

Beweis. (i) Das ist eine Umformulierung der Formel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

mittels der Substitution $z = z_0 + re^{it}$.

Für (ii) integriert man das Ergebnis von (i) über $0 < r < R$. $\square$

Der Cauchysche Integralsatz besitzt eine Art Umkehrung: eine stetige Funktion, deren Integrale entlang geschlossenen Kurven verschwinden, ist notwendig holomorph. Hier reicht es sogar aus, wie im Lemma von Goursat die Integrale entlang Dreiecken zu betrachten:

Satz 3.27 (Satz von Morera). *Sei D ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit der Eigenschaft, dass*

$$\int_{C_{z_0, z_1, z_2}} f(z) dz = 0$$

für jedes in D enthaltene Dreieck C_{z_0, z_1, z_2} gilt. Dann ist f holomorph.

Beweis. Komplexe Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft: um die Differenzierbarkeit von f in z_0 zu beweisen, dürfen wir f auf eine kleine in D enthaltene Kreisscheibe um z_0 einschränken. Sei also o.B.d.A. D eine Kreisscheibe mit

Mittelpunkt z_0 .

Für $z \in D$ sei

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(w) \, dw,$$

wobei wir mit $\int_{z_0}^z$ immer Integration entlang der geraden Strecke von z_0 nach z meinen. Nach der Annahme gilt

$$\int_{z_0}^z f(w) \, dw + \int_z^{z+h} f(w) \, dw - \int_{z_0}^{z+h} f(w) \, dw = \int_{C_{z_0, z, z+h}} f(w) \, dw = 0,$$

wenn $z_0, z, z+h$ in D enthalten sind, also

$$F(z) + \int_z^{z+h} f(w) \, dw = F(z+h).$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(w) - f(z) \, dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(z+th) - f(z)| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(z+th) - f(z)|. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, gilt im Limes $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Wir haben bewiesen: F ist holomorph mit Ableitung f . Nach Satz 3.25 ist f selbst holomorph. $\square$

Satz 3.28 (Satz von Weierstraß). *Sei D ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D , die auf kompakten Teilmengen von D gegen eine Grenzfunktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge $(f'_n)_n$ gleichmäßig auf Kompakten, die Grenzfunktion f ist holomorph, und es gilt*

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z), \quad z \in D.$$

Beweis. Sei $\Delta \subseteq D$ eine in D enthaltene abgeschlossene Dreiecksfläche mit Rand C . Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt $\int_C f_n(z) \, dz$ für jedes n . Aus der gleichmäßigen

Konvergenz von $(f_n)_n$ auf Kompakten folgt

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist f dann holomorph.

Für die Konvergenz der Ableitungen genügt es zu zeigen, dass f'_n auf jedem kompakten Kreis in D gleichmäßig gegen f' konvergiert. Sei dazu $z_0 \in D$ fest und $0 < r < R$ Radien, sodass $\{z : |z - z_0| \leq R\} \subseteq D$. Nach der (verallgemeinerten) Cauchyschen Integralformel gilt die Darstellung

$$f'_n(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=R} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw, \quad |z - z_0| \leq r,$$

und mit der Standardabschätzung bekommt man

$$\sup_{|z-z_0| \leq r} |f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{R}{(R-r)^2} \cdot \sup_{|w-z_0|=R} |f_n(w) - f(w)|.$$

Die gleichmäßige Konvergenz von f'_n gegen f' folgt jetzt aus der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen f . $\square$

Proposition 3.29 (Cauchy-Ungleichung). *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und sei f eine auf dem Kreis $\{|z - z_0| < R\}$ definierte holomorphe Funktion. Dann gilt für jedes $0 < r < R$:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Beweis. Sei $0 < r < R$. Wir verwenden die Standardabschätzung in

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

und bekommen

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{|z-z_0|=r} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|. \quad \square$$

Korollar 3.30 (Satz von Liouville). *Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte ganze (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktion. Dann ist f konstant.*

Beweis. Sei $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$. In jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt nach der Cauchy-Ungleichung

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \cdot M,$$

für jeden Radius $r > 0$. Also verschwindet f' identisch, und (da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist) f ist konstant. $\square$

Korollar 3.31 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

ein nichtkonstantes Polynom. Dann hat P eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Man findet eine von z unabhängige Konstante $C > 0$, sodass

$$|P(z)| \geq C \cdot |z|^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

gilt. (Vgl. Übungsblatt 4.) Insbesondere existiert ein $M > 0$ und ein Radius $R > 0$, sodass $|P(z)| > M$ für $|z| > R$ gilt.

Wenn P keine Nullstellen hat, dann ist $\frac{1}{P}$ eine ganze Funktion, die auf dem kompakten Kreis $|z| \leq R$ beschränkt ist. Außerdem gilt $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{M}$ für $|z| > R$. Damit ist $\frac{1}{P}$ eine beschränkte ganze Funktion, die nach dem Satz von Liouville konstant sein muss. $\square$

Satz 3.32 (Satz von der Taylorentwicklung). *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und sei f eine auf dem offenen Kreis $D = \{|z - z_0| < R\}$ definierte holomorphe Funktion. Dann gilt die Potenzreihendarstellung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

in D .

Beweis. Sei r ein Radius mit $|z - z_0| < r < R$. Dann verwenden wir die Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Man schreibe

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} \\ &= \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= \frac{1}{w-z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^j}{(w-z_0)^j}.\end{aligned}$$

Diese Darstellung als Potenzreihe ist gültig und auf dem Kreis $|w-z_0| = r$ gleichmäßig konvergent, da $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r}$ konstant und kleiner 1 ist. Das erlaubt das Vertauschen von Integral und Reihe:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \cdot \frac{1}{w-z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^j}{(w-z_0)^j} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \cdot \frac{(z-z_0)^j}{(w-z_0)^{j+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z-z_0)^j \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} dw \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z-z_0)^j.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt setzen wir die verallgemeinerte Cauchy-Formel für $f^{(j)}(z_0)$ ein. $\square$

Umgekehrt beweisen die Cauchy-Ungleichungen die Konvergenz der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$. Sei nämlich $r < R$ beliebig und $M = \sup_{|z-z_0| \leq r} |f(z)|$. Dann liefert die Cauchy-Ungleichung

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leq \sqrt[n]{M/r^n} = \frac{1}{r} \sqrt[n]{M},$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leq \frac{1}{r}.$$

Nach dem Satz von Cauchy–Hadamard konvergiert die Potenzreihe in der ganzen Kreisscheibe $\{|z-z_0| < R\}$.

Beispiel 3.33. Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm 2\pi i n : n \in \mathbb{N}\}$ und sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} : & z \neq 0; \\ 1 : & z = 0. \end{cases}$$

Dann ist f holomorph; zur Holomorphie in $z = 0$ schreibe man $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ als Inverses der (ganzen) Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n = \frac{e^z - 1}{z}$$

mit $P(0) = 1$.

Die **Bernoulli-Zahlen** B_n definiert man über die Taylor-Entwicklung um 0 von $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Also

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Die größte in D enthaltene Kreisfläche um 0 hat Radius 2π . Nach dem Satz von der Taylorentwicklung konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ auch für $|z| < 2\pi$. Da aber

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi i} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{e^{2\pi i} - 1}{2\pi i} = 0,$$

divergiert die Potenzreihe in $z = 2\pi i$. Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ muss also genau 2π sein.

Korollar 3.34. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist holomorph;
- (ii) f ist analytisch; das heißt, für jeden Punkt $z_0 \in D$ existiert ein Radius $r > 0$, sodass f auf der Umgebung $\{|z - z_0| < r\}$ durch eine Potenzreihe dargestellt wird:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r.$$

3.5. Homotopie, Homologie und die Umlaufzahl

Wir skizzieren den Beweis einer Verstärkerung des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel. Die dafür relevanten Begriffe werden in der algebraischen Topologie ausführlicher behandelt.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man definiert zwei Äquivalenzrelationen auf den (stückweise glatten) geschlossenen Kurven in D :

- (i) Homotopie. Zwei Kurven heißen *homotop*, wenn sie in D ineinander stetig deformiert werden können.

Genauer heißt das: sind $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \rightarrow D$ zwei Parametrisierungen von Kurven mit

$\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$ und $\varphi_2(0) = \varphi_2(1)$, dann ist eine Homotopie eine stetige Funktion $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ mit den Eigenschaften

$$H(0, t) = \varphi_1(t), \quad H(1, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

und

$$H(s, 0) = H(s, 1), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Eine Kurve heißt *nullhomotop*, wenn sie in D zur konstanten Kurve $\varphi(t) = a$, $0 \leq t \leq 1$ homotop ist.

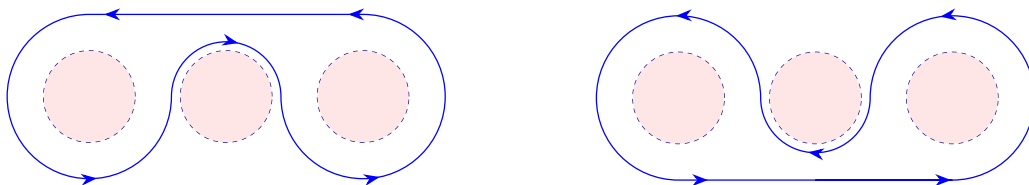
(ii) Homologie (etwas skizzenhaft). Hier arbeitet man mit Zyklen: ein *Zyklus* ist eine formale Summe $\Gamma = \sum n_C [C]$ endlich vieler geschlossenen Kurven $C \subseteq D$ mit ganzen Zahlen $n_C \in \mathbb{Z}$. Man definiert das Integral einer holomorphen Funktion f entlang einem Zyklus $\Gamma = \sum n_C [C]$ durch

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum n_C \int_C f(z) dz.$$

Zwei Zyklen heißen *homolog*, wenn sie in D durch Homotopien und Hinzufügen von Kurven, die in beiden Richtungen durchlaufen werden, ineinander geführt werden können. Ein Zyklus heißt *nullhomolog*, wenn er zum Nullzyklus $\Gamma = 0$ homolog ist.

Anschaulich sind zwei Wege oder zwei Zyklen genau dann homolog, wenn sie jedes Loch in D gleich oft umlaufen.

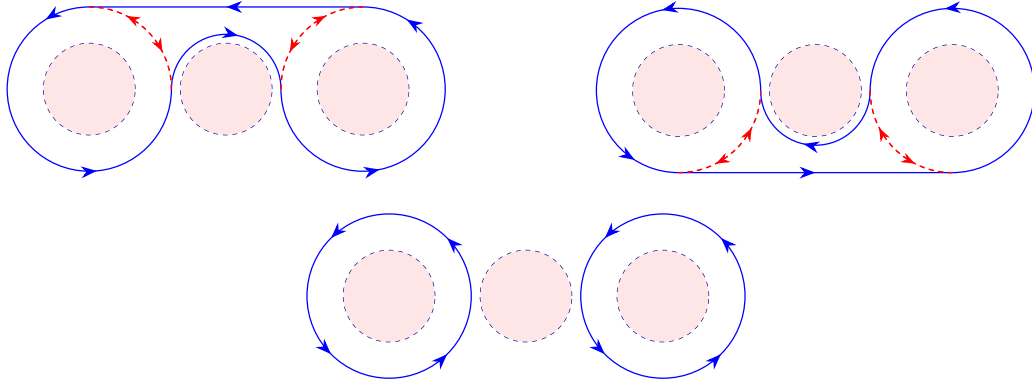
Beispiel 3.35. Sei D das Komplement in $\mathbb{C}$ von drei abgeschlossenen Kreisen. Man kann zeigen, dass die abgebildeten Kurven in D nicht homotop sind. Dafür sind die Kurven homolog. (Sie umlaufen die linke und rechte Löcher einmal und das mittlere Loch 0 mal.)



Figur 3.6: Homologe aber nicht homotope Kurven.

Das sieht man auch wie folgt. Man kann die Kurven nämlich aufschneiden, sodass in beiden Fällen ein Zyklus entsteht, der eine Summe von zwei um einen Kreis umlaufenden Kurven und einem nullhomotopen Weg ist.

In einem Zyklus $\Gamma = \sum n_C [C]$ wird nicht verlangt, dass die Anfangs- und Endpunkte der Komponenten C kompatibel sind. Auch wenn sie das sind, wird z.B. beim Zyklus $[C_1] + [C_2]$, anders wie bei der zusammengesetzten Kurve $C_1 + C_2$, nichts über die zeitliche Reihenfolge der C_i behauptet.



Figur 3.7: Homologe Zyklen.

Der Satz von Cauchy verallgemeinert sich wie folgt:

Satz 3.36. (i) (Cauchyscher Integralsatz, Homotopie-Version) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und C_1, C_2 homotope geschlossene Kurven in D . Dann gilt

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

für jede holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

(ii) (Cauchyscher Integralsatz, Homologie-Version) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und Γ_1, Γ_2 homologe Zyklen in D . Dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

für jede holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis. [Beweisskizze] (i) Sei $f = u + iv$ holomorph. Das Bild einer Homotopie von C_1 nach C_2 definiert eine Fläche Σ in $\mathbb{C}$, deren orientierter Rand der Zyklus $C_1 + -C_2$ ist. Nach dem Satz von Gauß in der Ebene gilt

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{\partial \Sigma} u dx - v dy + i \int_{\partial \Sigma} u dy + v dx \\ &= \int_{\Sigma} \underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}}_{=0} dx dy + i \int_{\Sigma} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Satzes ist dabei erlaubt, da die Ableitungen von u und v stetig sind.

(ii) Γ_2 bekommt man aus Γ_1 durch eine endliche Kette von Homotopien und Hinzufügen von Kurven, die in beiden Richtungen durchlaufen sind. Beide ändern nicht das Integral von $f(z) dz$. $\square$

Definition 3.37. Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve und $z \in \mathbb{C} \setminus C$. Die **Umlaufzahl** von C um z ist das Integral

$$\chi(C; z) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w - z} dw.$$

Beispiel 3.38. Ist C der k -fach durchlaufene Kreis von Radius $r > 0$ um z , mit Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi k] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = z + re^{it},$$

dann ist

$$\chi(C; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi k} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = k.$$

In diesem Fall ergibt $\chi(C; z)$ die intuitive Antwort darauf, wie oft die Kurve C um den Punkt z herum läuft.

Proposition 3.39. Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve und $z \notin C$. Dann gilt

$$\chi(C; z) \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage für glatte Kurven. Der Beweis im stückweise glatten Fall ist ähnlich.

Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine differenzierbare Parametrisierung von C und sei

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) := \int_a^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s) - z} ds.$$

Dann ist h differenzierbar, und

$$h'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z},$$

und es gilt

$$h(a) = 0 \text{ und } h(b) = \int_a^b \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s) - z} ds = \int_C \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i \cdot \chi(C; z).$$

Man definiere jetzt die Funktion

$$H(t) := e^{-h(t)} \cdot (\varphi(t) - z), \quad a \leq t \leq b.$$

Dann gilt

$$H'(t) = e^{-h(t)}\varphi'(t) - e^{-h(t)}h'(t)(\varphi(t) - z) = e^{-h(t)} \cdot \left(\varphi'(t) - h'(t)(\varphi(t) - z) \right) = 0.$$

Also ist H konstant. Der Wert von H ist

$$H(t) = H(a) = e^{-h(a)}(\varphi(a) - z) = \varphi(a) - z.$$

Also gilt

$$e^{h(t)} = \frac{\varphi(t) - z}{H(t)} = \frac{\varphi(t) - z}{\varphi(a) - z}, \quad a \leq t \leq b.$$

Insbesondere gilt:

$$e^{2\pi i \chi(C; z)} = e^{h(b)} = \frac{\varphi(b) - z}{\varphi(a) - z} = 1,$$

da C geschlossen ist (also $\varphi(a) = \varphi(b)$). Damit ist $\chi(C; z) \in \mathbb{Z}$. □

Für einen Zyklus $\Gamma = \sum_C n_C [C]$ und $z \notin \Gamma$ (d.h. $z \notin C$ für irgendeine Kurve C mit $n_C \neq 0$) definiert man die Umlaufzahl

$$\chi(\Gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw = \sum_C \frac{1}{2\pi i} n_C \int_C \frac{1}{w - z} dw.$$

Damit gilt (nach der Homologie-Version des Cauchyschen Integralsatzes): zwei Zyklen, die in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homolog sind, haben um z die gleiche Umlaufzahl!

4. Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

4.1. Der Identitätssatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Eine Teilmenge $M \subseteq D$ heißt **diskret** (in D), wenn D keine Häufungspunkte von M enthält.

Proposition 4.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nicht identisch verschwindet. Dann ist die Menge der Nullstellen von f diskret in D .*

Beweis. Sei M die Menge der Nullstellen von f . Angenommen, M wäre nicht diskret in D ; sei $a \in D$ ein Häufungspunkt, und $(a_n)_n$ eine Folge von Nullstellen von f , die gegen a konvergiert.

f hat um a eine Taylorentwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r.$$

Wir zeigen jetzt, dass alle $c_n = 0$ sind: wenn das nicht der Fall wäre, und $N \in \mathbb{N}_0$ minimal gewählt ist mit $c_N \neq 0$, dann folgt aus

$$c_N + c_{N+1}(z-a) + c_{N+2}(z-a)^2 + \dots = \frac{f(z)}{(z-a)^N}$$

und der Stetigkeit von f

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n)}{(a_n - a)^N} = c_N,$$

ein Widerspruch.

Die gesamte Kreisscheibe $|z-a| < r$ besteht also aus Häufungspunkten von Nullstellen von f :

$$U = \{a \in D : a \text{ ist Häufungspunkt von } M\} \subseteq D$$

ist damit offen. Andererseits ist

$$V = \{a \in D : a \text{ ist kein Häufungspunkt von } M\}$$

auch offen. Da $D = U \cup V$ zusammenhängend ist, gilt entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Falls $U = \emptyset$, ist M diskret; falls $V = \emptyset$, ist jeder Punkt von D ein Häufungspunkt von den Nullstellen von f und (da f stetig ist) selbst eine Nullstelle, also $f \equiv 0$. $\square$

Satz 4.2 (Identitätssatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

- (i) $f = g$;
- (ii) Es gibt eine Folge $(z_n)_n$ in D mit einem in D enthaltenen Häufungspunkt, sodass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n ;
- (iii) Es gibt einen Punkt $a \in D$ mit $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ für alle n .

Beweis. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) sind klar.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Man entwickle f und g um den Punkt a als Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = g(z), \quad |z-a| < r.$$

Im Kreis $|z-a| < r$ findet man viele geeignete Folgen $(z_n)_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) folgt aus Proposition 4.1 für die Funktion $f - g$. $\square$

In (ii) ist es wichtig, dass der Häufungspunkt der Folge $(z_n)_n$ zu D gehört. Man betrachte z.B. die Menge

$$M = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

die in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ diskret liegt, in $\mathbb{C}$ aber den Häufungspunkt 0 hat. Die Funktion

$$f(z) = e^{2\pi i/z} - 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist holomorph und hat jeden Punkt $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ als Nullstelle; dennoch ist f nicht die Nullfunktion.

Bemerkung 4.3. Aus dem Identitätssatz folgt das Prinzip der eindeutigen analytischen Fortsetzung. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subseteq D$ eine Menge mit einem Häufungspunkt in D . Sei $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn eine **analytische Fortsetzung** von f auf D existiert (d.h. eine holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F|_M = f$), so ist diese eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel sind die komplexen Funktionen $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ die eindeutigen Fortsetzungen der reellen Funktionen $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$.

Mit dem Identitätssatz lassen sich auch Funktionalgleichungen oder Differenzialgleichungen ins Komplexe fortsetzen. Wenn man zum Beispiel die Gleichungen

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ kennt, dann folgt

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z), \quad \sin'(z) = \cos(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ aus dem Identitätssatz.

4.2. Das Prinzip vom Argument

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 4.4. Die **logarithmische Ableitung** einer holomorphen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$\frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in D \setminus \{w \in D : f(w) = 0\}.$$

Wenn es einen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Logarithmus $\log$ gäbe, dann wäre $\frac{f'}{f}$ die Ableitung von $\log(f)$.

Die logarithmische Ableitung macht (wie man von $\log$ gerne hätte) Summen aus Produkten:

Lemma 4.5. Für holomorphe Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

Beweis. Nachrechnen. □

Definition 4.6. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. f hat in $a \in D$ eine Nullstelle **N -ter Ordnung** ($N \in \mathbb{N}$), wenn die Potenzreihenentwicklung von f um a die Form

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a| < r, \quad c_N \neq 0$$

hat. Man schreibt $N = \text{ord}(f; z=a)$.

Wenn $a \in D$ keine Nullstelle von f ist, dann schreiben wir $\text{ord}(f; z=a) = 0$.

Lemma 4.7. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in $a \in D$ eine Nullstelle N -ter Ordnung hat. Dann existiert eine holomorphe Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$ und

$$f(z) = (z-a)^N g(z).$$

Beweis. Für $z \in D \setminus \{a\}$ definieren wir $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^N}$.
 Um $z = a$ hat f nach Definition eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r;$$

Man definiere $g(a) = c_N \neq 0$; wegen der Darstellung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+N} (z-a)^n, \quad |z-a| < r$$

ist g auch in $z = a$ holomorph. □

Sei jetzt $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nicht identisch die Nullfunktion ist. Sei $C \subseteq D$ eine geschlossene Kurve, deren Inneres ganz in D enthalten ist, und f habe auf C keine Nullstellen. Da die Nullstellen von f in D diskret liegen, gibt es davon nur endlich viele in der kompakten Teilmenge $K = C \cup \text{Inn}(C)$ (und damit in $\text{Inn}(C)$); sei $a_1, \dots, a_k$ eine Auflistung dieser Nullstellen. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.7 lässt sich f in der Form

$$f(z) = (z-a_1)^{n_1} (z-a_2)^{n_2} \dots (z-a_k)^{n_k} g(z)$$

mit einer auf $\text{Inn}(C)$ nullstellenfreien holomorphen Funktion g und Ordnungen

$$n_j = \text{ord}(f; z = a_j) \in \mathbb{N}.$$

Durch Bilden logarithmischer Ableitungen bekommen wir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = n_1 \cdot \frac{1}{z-a_1} + n_2 \cdot \frac{1}{z-a_2} + \dots + n_k \cdot \frac{1}{z-a_k} + \frac{g'}{g}.$$

Das führt zur folgenden nützlichen Formel:

Satz 4.8 (Prinzip vom Argument).

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_1 \chi(C; a_1) + n_2 \chi(C; a_2) + \dots + n_k \chi(C; a_k)$$

ist die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl der Nullstellen von f in $\text{Inn}(C)$.

Die Vielfachheit ist dabei die Ordnung von a_j als Nullstelle von f mal der Umlaufzahl der Kurve C um a_j .

Beweis. Aus der obigen Diskussion bekommen wir

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{n_j}{z - a_j} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Da $\frac{g'}{g}$ auf D holomorph ist und $\text{Inn}(C) \subseteq D$ gilt, ist $\oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$. Für die anderen Terme gilt $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{n_j}{z - a_j} dz = n_j \cdot \chi(C; a_j)$ nach Definition der Umlaufzahl. $\square$

Zum Namen des Satzes schreibt man mit Hilfe einer Substitution

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(C)} \frac{1}{w} dw = \chi(f(C); w);$$

die (mit Vielfachheiten gezählter) Nullstellenanzahl ist also genau die Umlaufzahl der Bildkurve $f(C)$ um den Punkt 0. Das zählt wiederum, wie oft das Argument $\arg(f(z))$ die Menge $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ durchläuft, wenn z entlang der Kurve C gezogen wird.

Das folgende Lemma kann bei der Anwendung vom Argumentprinzip hilfreich sein, und ist sowieso von Interesse.

Lemma 4.9. *Sei D ein Elementargebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen. Dann gilt:*

- (i) f besitzt einen **holomorphen Logarithmus**; d.h. eine holomorphe Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{h(z)}$, $z \in D$.
- (ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt f einen **holomorphen n -ten Wurzel**, d.h. eine holomorphe Funktion $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_n(z)^n = f(z)$.

Beweis. (i) Da f keine Nullstellen auf D hat, ist die Funktion $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorph. Sei $G(z)$ eine Stammfunktion von g . (Das existiert, weil D ein Elementargebiet ist). Für die holomorphe Funktion $u(z) = \frac{\exp(G(z))}{f(z)}$ gilt

$$u'(z) = \frac{G'(z) \exp(G(z)) f(z) - \exp(G(z)) f'(z)}{f(z)^2} = \frac{\exp(G(z))}{f(z)^2} \cdot (gf - f') = 0.$$

Also ist u konstant: $u \equiv C$. Mit $c = \text{Log}(C)$ und $h(z) = G(z) - c$ haben wir

$$\exp(h(z)) = e^{G(z)} \cdot e^{-c} = f(z) e^c \cdot e^{-c} = f(z).$$

(ii) Sei h ein holomorpher Logarithmus von f nach (i). Man definiere

$$f_n(z) = \exp\left(\frac{1}{n}h(z)\right).$$

Dann gilt

$$f_n(z)^n = \exp(h(z)) = f(z), \quad z \in D. \quad \square$$

Beispiel 4.10. Sei $P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0$ ein Polynom von Grad $d \geq 1$ ($a_d \neq 0$). Für jedes hinreichend große $R > 0$ läuft das Bild unter P des Kreises $|z| = R$ genau d mal um den Ursprung. (Motivation: das Bild unter $a_d z^d$ ist ein d -mal durchlaufener Kreis, und die Terme mit kleineren Potenzen $a_{d-1} z^{d-1}, \dots, a_0$ kann man im Limes $R \rightarrow \infty$ vernachlässigen.) Das beweist man ausführlich wie folgt:

Mit der Dreiecksungleichung bekommt man für hinreichend großes $|z|$ eine Abschätzung

$$c|z|^d \leq |P(z)| \leq C|z|^d$$

mit Konstanten $c, C > 0$. Für $\frac{P'(z)}{P(z)}$ gilt die Approximation

$$\frac{P'(z)}{P(z)} \approx \frac{(z^d)'}{z^d} = \frac{d}{z}.$$

In der Tat ist

$$\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{d}{z} = \frac{zP'(z) - dP(z)}{zP(z)}$$

ein Quotient von einem Polynom von Grad $d - 1$ durch ein Polynom von Grad $d + 1$. Man bekommt

$$\left| \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{d}{z} \right| < C \cdot \frac{1}{|z|^2}, \quad |z| \text{ hinreichend groß}$$

für eine Konstante C , und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{d}{z} dz \right| \leq 2\pi R \cdot \sup_{|z|=R} \left| \frac{C}{z^2} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \frac{C}{R} = 0,$$

und damit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{d}{z} dz = d.$$

Nach dem Prinzip von dem Argument hat $P(z)$ genau d komplexe Nullstellen (mit Vielfachheiten).

Beispiel 4.11. Sei $P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0$ ein Polynom von Grad $d \geq 1$ ($a_d \neq 0$), das keine Nullstelle auf der imaginären Achse hat. Wir untersuchen die Anzahl der Nullstellen von P in der Halbebene $\operatorname{Re}[z] < 0$:

Sei dazu C_R die positiv orientierte Kurve, die aus dem Halbkreis γ_R von Radius $R > 0$ und dem Achsenabschnitt ℓ_R zwischen $-iR$ und iR besteht. Wie im letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{d}{z} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d}{Re^{it}} iRe^{it} dt \\ &= \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Der Abschnitt ℓ_R liegt in einem offenen Rechteck, auf dem $P(z)$ nullstellenfrei ist. Weil das ein Elementargebiet ist, hat P dort einen Logarithmus, etwa

$$\log(P(z)) = \log |P(z)| + i\theta(z)$$

mit einem Argument θ . Also ist

$$\int_{\ell_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \log |P(iR)| + i\theta(iR) - \log |P(-iR)| - i\theta(-iR).$$

Im Limes $R \rightarrow \infty$ haben wir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|P(iR)|}{|P(-iR)|} = 1,$$

also $\log |P(iR)| - \log |P(-iR)| \rightarrow 0$, und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2\pi} (\theta(i\infty) - \theta(-i\infty))$$

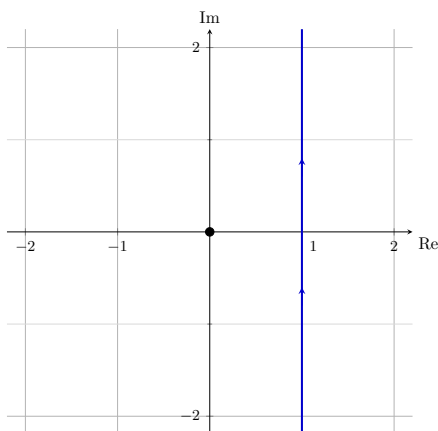
misst die Änderung des Arguments von $P(iy)$ wenn y von $-\infty$ nach ∞ fährt; mit anderen Worten, wie oft $P(iy)$ um 0 läuft.

Nach dem Prinzip vom Argument gilt

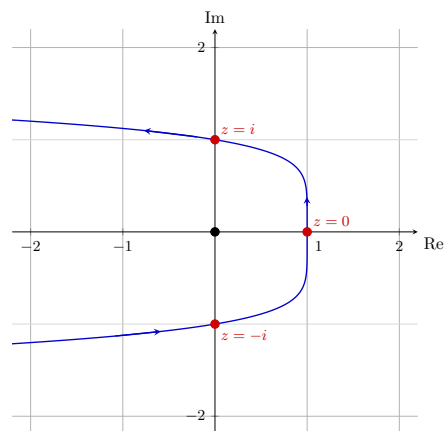
$$\begin{aligned} & \#\{\text{Nullstellen in der Halbebene } \operatorname{Re}[z] < 0\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \chi(P(C_R); 0) \\ &= \frac{d}{2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \#\{\text{Umläufe der Kurve } y \mapsto P(iy) \text{ um } 0\}. \end{aligned}$$

Für das Polynom $P(z) = z^5 + 1$ gilt z.B. $P(iy) = 1 + iy^5$. Wenn y von $-\infty$ nach ∞ fährt, „umläuft“ die Kurve $P(iy)$ den Ursprung $1/2$ mal. (Warum?) Die Anzahl der Nullstellen von $P(z)$ in der Halbebene $\operatorname{Re}[z] < 0$ ist also $\frac{1}{2}\operatorname{grad}(P) + \frac{1}{2} = 3$.

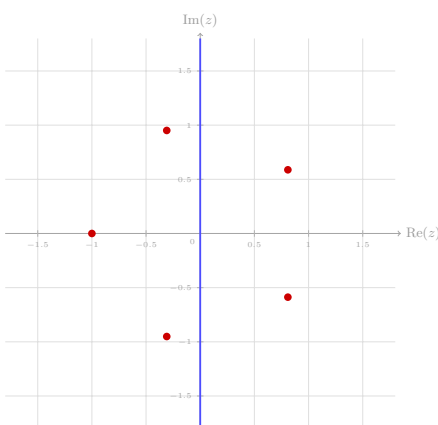
Für das Polynom $P(z) = z^6 + z^5 + 1$ bildet $P(iy) = 1 - y^6 + iy^5$ eine Kurve, die einmal um 0 läuft, vgl. Figur. Die Anzahl der Nullstellen in der Halbebene $\operatorname{Re}[z] < 0$ ist also $\frac{1}{2}\operatorname{grad}(P) + 1 = 4$.



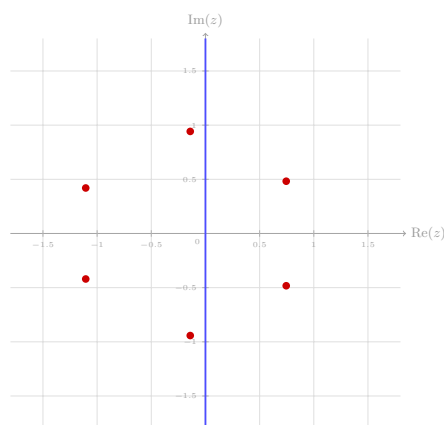
(a) $P(z) = z^5 + 1$



(b) $P(z) = z^6 + z^5 + 1$



(c) $P(z) = z^5 + 1$



(d) $P(z) = z^6 + z^5 + 1$

Figur 4.1: Das Prinzip vom Argument:

(a),(b): Die Kurven $P(iy)$ ($y \in \mathbb{R}$). Für $P(z) = z^5 + 1$ macht $P(iy)$ (die Gerade $\text{Re}[z] = 1$) eine halbe Revolution um 0. Für $P(z) = z^6 + z^5 + 1$ macht $P(iy)$ genau eine Revolution um 0.

(c),(d): Die Nullstellen der jeweiligen Polynome.

Eine klassische Anwendung des Argumentprinzips ist der Satz von Rouché.

Satz 4.12 (Satz von Rouché). Sei D ein Elementargebiet, $C \subseteq D$ eine geschlossene Jordan-Kurve und $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, für die

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad z \in C$$

gilt. Dann haben f und $f + g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\text{Inn}(C)$.

Beweis. Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$ eine Parametrisierung. Mit der Dreiecksungleichung findet man

$$|f(z) + sg(z)| \geq |f(z)| - s|g(z)| > 0$$

für jedes $s \in [0, 1]$ und jedes $z \in C$. Das ergibt eine Homotopie in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwischen den Bildkurven $f(C)$ und $(f + g)(C)$: und zwar

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad H(s, t) = f(\varphi(t)) + sg(\varphi(t)).$$

Daher umlaufen $f(C)$ und $(f + g)(C)$ den Punkt 0 gleich oft. □

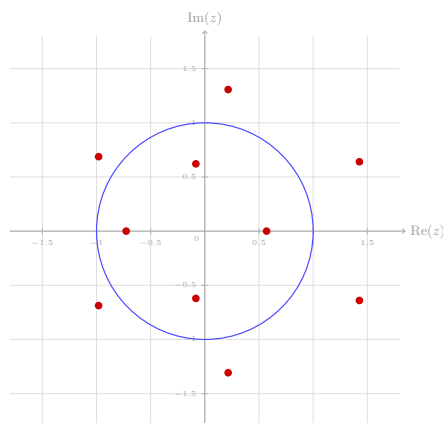
Beispiel 4.13. Sei P das Polynom

$$P(z) = z^{10} - z^9 + 6z^4 + 2z^3 - 1.$$

Wir bestimmen die Anzahl der Nullstellen von P in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$: Auf dem Kreis $|z| = 1$ gilt

$$6 = 6|z|^4 > 5 \geq |z^{10} - z^9 + 2z^3 - 1|.$$

Nach dem Satz von Rouché hat P die gleiche Nullstellenanzahl in $\mathbb{E}$ wie $6z^4$; also 4 Nullstellen.



Figur 4.2: Die komplexen Nullstellen von $P(z) = z^{10} - z^9 + 6z^4 + 2z^3 - 1$.

4.3. Der Satz von der Gebietstreue

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, wenn f offene Mengen auf offene Mengen abbildet. (Das darf man nicht mit Stetigkeit verwechseln: f ist stetig, wenn $f^{-1}(U)$ in X offen ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$.)

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass eine nichtkonstante holomorphe Abbildung f auf einem Gebiet immer offen ist. Das ist eine Anwendung des Prinzips von dem

Argument, die die Lösbarkeit von Gleichungen $f(z) = a$ auf die Bestimmung eines Integrals reduziert.

Proposition 4.14. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung, die in einem Punkt $z_0 \in D$ eine Nullstelle N ter Ordnung hat ($N \geq 1$). Dann existieren $\varepsilon > 0$ und $r > 0$, sodass für jede komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < \varepsilon$ die Gleichung*

$$f(z) = a$$

im Ball $|z - z_0| < r$ genau N Lösungen hat.

Beweis. Sei $r > 0$ ein Radius, sodass D den abgeschlossenen Ball

$$B = \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| \leq r\}$$

enthält, und weder f noch f' eine Nullstelle in $B \setminus \{z_0\}$ besitzt. (Das geht, weil f nach Definition einer Nullstelle N ter Ordnung nicht konstant sein kann; die Nullstellen von f und f' sind daher diskret in D .) Nach dem Prinzip vom Argument gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = N.$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, dass $|f(w)| > \varepsilon$ auf dem Kreis $|w - z_0| = r$ gilt. (Das ist möglich, weil f stetig und nullstellenfrei auf dem Kompaktum $|w - z_0| = r$ ist.) Dann ist die Funktion

$$(w, a) \mapsto \frac{f'(w)}{f(w) - a}, \quad |w - z_0| = r, \quad |a| < \varepsilon$$

stetig. Die Funktion

$$a \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f'(w)}{f(w) - a} dw$$

ist damit stetig auf $B_\varepsilon(0)$; sie nimmt aber (als Nullstellenanzahl) nur ganze Zahlen als Werte an, muss also konstant sein. Das heißt:

$$\begin{aligned} |a| < \varepsilon &\implies \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f'(w)}{f(w) - a} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = N \\ &\implies \text{Die Gleichung } f(w) = a \text{ hat } N \text{ Lösungen (mit Vielfachheiten).} \end{aligned}$$

Für $0 < |a| < \varepsilon$ und $|w - z_0| < r$ hat $w \mapsto f(w) - a$ keine Nullstellen höherer Ordnung, da f' dort keine Nullstellen (außer eventuell $w = z_0$) hat. Die Lösungen von $f(w) = a$ müssen einfache Nullstellen von $f(w) - a$ sein, und es gibt genau N davon. $\square$

Dass das Integral $N(a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f'(w)}{f(w)-a} dw$ im obigen Beweis konstant (als Funktion von a) ist, sieht man auch mit der Leibniz-Regel (Differenzieren unter dem

Integralzeichen):

$$N'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f'(w)}{(f(w)-a)^2} dw.$$

Der neue Integrand besitzt eine Stammfunktion bzgl. w , nämlich $-\frac{1}{f(w)-a}$. Das Integral davon ist also $N'(a) \equiv 0$.

Satz 4.15 (Satz von der Gebietstreue). *Sei D ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung. Dann ist das Bild $f(D)$ ein Gebiet.*

Beweis. Das Bild einer (weg)zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist immer (weg)zusammenhängend. Es geht darum zu beweisen, dass $f(D)$ offen ist.

Sei $a \in f(D)$ und $z_0 \in D$ ein Urbild. Dann hat die Funktion $z \mapsto f(z) - a$ eine Nullstelle (endlicher Ordnung) in $z = z_0$. Nach Proposition 4.14 existiert $\varepsilon > 0$ und $r > 0$, sodass für jede Zahl $b \in \mathbb{C}$, $0 < |b| < \varepsilon$ die Gleichung $f(z) - a = b$ mindestens eine Lösung im Ball $|z - z_0| < r$ besitzt. Insbesondere gehört jedes $a + b$ zum Bild $f(D)$, d.h. $f(D)$ enthält die offene Umgebung $B_\varepsilon(a)$ von a . $\square$

Korollar 4.16 (Maximumprinzip). *Sei D ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Der Betrag $|f|$ besitze in einem Punkt $a \in D$ ein lokales Maximum; d.h. es gebe eine Umgebung $a \in U \subseteq D$ mit*

$$|f(a)| = \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

Dann ist f konstant.

Beweis. Die Umgebung U sei o.B.d.A. offen und zusammenhängend. Wenn f nicht konstant wäre, dann wäre $f(U)$ eine offene Umgebung von $f(a)$. Insbesondere müsste $f(U)$ Punkte enthalten, die im Betrag größer als $f(a)$ sind. $\square$

Bemerkung 4.17. (i) Für nichtkonstante holomorphe Funktionen *ohne Nullstellen* gilt auch das Minimumprinzip: der Betrag $|f|$ hat keine lokale Minima. Das folgt aus dem Maximumprinzip für $1/f$.

(ii) Auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq D$ nimmt $|f|$ als stetige Funktion ein Maximum an. Nach dem Maximumprinzip kann das Maximum nur auf ∂K angenommen werden. Es gilt also immer:

$$\sup_{z \in K} |f(z)| = \sup_{z \in \partial K} |f(z)|.$$

4.4. Lemma von Schwarz

Das Lemma von Schwarz ist eine Anwendung des Maximumprinzips auf holomorphe Funktionen, die die Einheitskreisscheibe in sich selbst abbilden. Sei

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Satz 4.18 (Lemma von Schwarz). *Sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{E}$$

und

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Wenn es einen Punkt $z \neq 0$ mit $|f(z)| = |z|$ gibt, oder gilt $|f'(0)| = 1$, dann ist f von der Form

$$f(z) = \zeta z, \quad z \in \mathbb{E}$$

mit einer Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$.

Beweis. Da $f(0) = 0$, haben wir

$$f(z) = z \cdot g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$. Für jedes $0 < r < 1$ gilt nach dem Maximumprinzip

$$\sup_{|z| \leq r} |g(z)| = \sup_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

(Hier gilt $|f(z)| \leq 1$, weil f $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$ abbildet.) Im Limes $r \rightarrow 1$ erhalten wir

$$\sup_{|z| < 1} |g(z)| \leq 1$$

und daher $|f(z)| \leq |z|$. Im Limes $z \rightarrow 0$ bekommen wir außerdem

$$|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| \leq 1.$$

Wenn $|f(z)| = |z|$ für irgendein $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, dann ist z ein lokales Maximum von g . Wenn $|f'(0)| = 1$, dann gilt $|g(0)| = 1$, also ist 0 ein lokales Maximum von g . In beiden Fällen folgt aus dem Maximumprinzip, dass $g \equiv \zeta$ konstant ist, also $f(z) = \zeta z$. $\square$

Beispiel 4.19. Damit bekommen wir einen anderen Beweis für den Satz von Liouville. Sei $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte ganze Funktion, $|h(z)| \leq M$ für $z \in \mathbb{C}$. Sei $R > 0$ ein Radius und $w \in \mathbb{C}$. Dann bildet die Funktion

$$f(z) := \frac{h(w + Rz) - h(w)}{2M}$$

$\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}$ und 0 auf 0 ab. Nach dem Lemma von Schwarz gilt

$$1 \geq |f'(0)| = \frac{R}{M} |h'(w)|.$$

Weil das für beliebiges $R > 0$ gilt, ist $h'(w) = 0$. Damit ist h konstant.

Mit dem Lemma von Schwarz kann man die *Automorphismengruppe* von $\mathbb{E}$ bestimmen, d.h. alle bijektive, holomorphe Funktionen f von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}$. Dazu kommen wir später.

5. Der Residuensatz

5.1. Isolierte Singularitäten

In diesem Abschnitt ist $D \subseteq \mathbb{C}$ immer offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Definition 5.1. Eine **(isolierte) Singularität** von f ist ein Punkt a , der nicht zu D gehört, der aber die Eigenschaft hat, dass D eine *punktierte Umgebung*

$$B_r^\circ(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}, \quad r > 0$$

um a enthält.

Die Definition einer isolierten Singularität hängt nicht von der Funktion f ab. Man klassifiziert Singularitäten nach dem Verhalten von f in ihrer Nähe.

Beispiel 5.2. (i) Die Funktionen $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{1}{z}$, $\exp(1/z)$ sind holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und haben alle eine isolierte Singularität in $z = 0$. Ihr Verhalten im Limes $z \rightarrow 0$ ist sehr unterschiedlich: $\frac{\sin(z)}{z}$ setzt sich stetig auf $z = 0$ fort, und $\frac{1}{z}$ geht im Betrag gegen ∞ . Man kann aber zeigen, dass $\exp(1/z)$ in jeder punktierten Umgebung von $z = 0$ jeden von 0 verschiedenen Wert w unendlich oft annimmt, etwa in den Punkten

$$z = \frac{1}{\operatorname{Log}(w) + 2\pi in}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \text{ hinreichend groß.}$$

Diese drei Funktionen sind exemplarisch für alle isolierten Singularitäten.

(ii) Die Funktionen $\operatorname{Log}(z)$, $\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$ usw. haben keine isolierte Singularität in $z = 0$, weil die negative reelle Achse nicht zum Definitionsbereich der Funktion gehört. Man spricht stattdessen von einem Verzweigungsschnitt. Die Definitionen und Sätze in diesem Kapitel gelten nicht für diese Funktionen.

Definition 5.3. Eine isolierte Singularität a von f heißt **hebbar**, wenn f eine holomorphe Fortsetzung auf $D \cup \{a\}$ besitzt.

Dabei ist $D \cup \{a\}$ offen, denn $D \cup \{a\} = D \cup B_r(a)$ für jedes hinreichend kleine r . Die holomorphe Fortsetzung auf $D \cup \{a\}$ bezeichnen wir normalerweise auch mit f . Es gilt also

$$f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Beispiel 5.4. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $z \neq 0$ hat eine hebbare Singularität in $z = 0$. Die holomorphe Fortsetzung ist die überall konvergierende Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere gilt $f(0) = 1$.

Satz 5.5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Sei a eine isolierte Singularität von f . Dann sind äquivalent:*

(i) a ist hebbbar;

(ii) Es gibt eine punktierte Umgebung $B_r^\circ(a)$ von a , auf der f beschränkt ist.

Das unterscheidet sich deutlich von Analysis in $\mathbb{R}$, wo man stetige Funktionen mit einer „eckigen“ Singularität findet; z.B. die Funktion $|x|$ in der Nähe von $x = 0$. In der Nähe einer nichthebbaren Singularität a muss sich f schlechter verhalten: entweder gilt $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$, oder $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$ existiert gar nicht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn a hebbbar ist, dann ist f (bzw. die holomorphe Fortsetzung von f) in a holomorph, also auch stetig.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir betrachten die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) : & z \in D; \\ 0 : & z = a. \end{cases}$$

Da f in einer punktierten Umgebung von a beschränkt bleibt, gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0.$$

g ist also nicht nur stetig, sondern auch holomorph, mit

$$g'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0.$$

Damit hat g eine Entwicklung als Potenzreihe um $z = a$, die wegen $g(a) = g'(a) = 0$ ab Exponent 2 beginnt:

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r.$$

Für $0 < |z-a| < r$ hat f die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n.$$

Diese Potenzreihe konvergiert für $|z-a| < r$ und definiert die holomorphe Fortsetzung von f in $z = a$. $\square$

Definition 5.6. (i) Eine isolierte Singularität a von f heißt **unwesentliche Singularität**, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass a eine hebbare Singularität der Funktion $(z - a)^m f(z)$ ist.

(ii) Eine unwesentliche Singularität, die nicht hebbar ist, heißt **Pol** von f .

Wenn f einen Pol in a hat, und die Zahl m minimal gewählt ist, sodass a eine hebbare Singularität von $(z - a)^m f(z)$ ist, dann heißt a **Pol m ter Ordnung**. Wir schreiben

$$\text{ord}(f; z = a) = -m.$$

Wenn a selbst eine hebbare Singularität von f ist, dann schreiben wir:

$$\text{ord}(f; z = a) = \begin{cases} 0 : & f(a) \neq 0; \\ m : & f \text{ hat eine Nullstelle } m\text{ter Ordnung in } a. \end{cases}$$

Dieser Begriff erweitert auf natürlicher Weise die Ordnung einer Nullstelle. Unter anderem gilt

$$\text{ord}(f \cdot g; z = a) = \text{ord}(f; z = a) + \text{ord}(g; z = a),$$

wenn f und g unwesentliche Singularitäten in a haben.

Beispiel 5.7. (i) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z$$

hat in $z = 0$ einen Pol zweiter Ordnung. Denn

$$f(z) = \frac{1 + 2z + 3z^2 + 4z^3}{z^2},$$

und 0 ist eine hebbare Singularität aber keine Nullstelle des Zählers $1 + 2z + 3z^2 + 4z^3$.

(ii) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat in $z = 0$ einen Pol erster Ordnung (d.h. einen einfachen Pol). Denn $z = 0$ ist eine hebbare Singularität von $\frac{z}{\sin(z)}$, aber keine Nullstelle der holomorphen Fortsetzung von $\frac{z}{\sin(z)}$.

Proposition 5.8. Sei a eine isolierte Singularität von f . Dann sind äquivalent:

(i) a ist ein Pol (irgendeiner Ordnung) von f ;

(ii) $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei m die Polordnung von a . Dann existiert der Limes

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = c \neq 0.$$

Da $\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^m = 0$ ist, muss $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ gelten.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Da $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$, ist f auf einer punktierten Umgebung $B_r^\circ(a)$ von

a nullstellenfrei. Die Funktion $g := 1/f$ ist dann holomorph auf $B_r^\circ(a)$ und es gilt $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz hat g eine holomorphe Fortsetzung auf $D \cup \{a\}$ mit einer Nullstelle in a ; sei m die Ordnung. Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{(z-a)^m} = c \neq 0,$$

also

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = \frac{1}{c} \neq 0,$$

und damit ist a ein Pol m ter Ordnung von f . □

Definition 5.9. Eine **wesentliche Singularität** von f ist eine nicht unwesentliche Singularität. Das heißt, die isolierte Singularität a ist wesentlich, wenn f weder einen Pol noch eine holomorphe Fortsetzung auf a besitzt.

Beispiel 5.10. Die Funktion $\exp(1/z)$ hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$. Keine Funktion $z^m \exp(1/z)$, $m \in \mathbb{N}_0$, kann eine holomorphe Fortsetzung in $z = 0$ besitzen. Denn $z^m \exp(1/z)$ hat den gleichen Wert wie z^m in den Punkten der Menge $\{1/(2\pi i n), n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, aber $z^m \exp(1/z) \neq z^m$ überall. Eine holomorphe Fortsetzung in $z = 0$ würde dem Identitätssatz widersprechen.

Satz 5.11 (Satz von Casorati–Weierstraß). *Sei a eine isolierte Singularität von f . Dann sind äquivalent:*

- (i) a ist eine wesentliche Singularität von f ;
- (ii) Das Bild $f(B_r^\circ(a))$ jeder punktierten Umgebung von a unter f ist eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Eine viel stärkere Aussage als (ii) ist der *große Satz von Picard*: auf jeder punktierten Umgebung einer wesentlichen Singularität nimmt f jeden Wert in $\mathbb{C}$, mit *höchstens einer Ausnahme*, unendlich oft an. Für $\exp(1/z)$ ist der Ausnahmewert 0.

Der Beweis vom großen Satz von Picard geht entweder über die Theorie der Riemann'schen Flächen oder eine viel genauere Untersuchung der Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen¹. Wir werden den Satz an dieser Stelle nicht beweisen können.

Bemerkung 5.12. Die komplexwertige Tangens-Funktion $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$ kann die zwei Werte $\pm i$ nicht annehmen. (Warum?)

Nach dem Satz von Picard kann die Singularität in $z = 0$ von $\tan(1/z)$ automatisch nicht isoliert gewesen sein. Das kann man auch direkter einsehen.

Der Beweis des Satzes von Casorati–Weierstraß ist nach den obigen Vorbereitungen nicht mehr so schwer:

¹z. B. *Funktionentheorie 2* von R. Remmert, G. Schuhmacher.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Die Annahme (ii) schließt die Charakterisierungen von hebbaren Singularitäten ($|f(z)|$ beschränkt) und Polen ($|f(z)| \rightarrow \infty$) aus, sodass a nur eine wesentliche Singularität sein kann.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, das Bild $f(B_r^\circ(a))$ einer punktierten Umgebung von a ist nicht dicht. Dann existiert ein $b \in \mathbb{C}$ und ein Radius $\varepsilon > 0$, sodass der ball $B_\varepsilon(b)$ um b vom Bild $f(B_r^\circ(a))$ disjunkt ist. Die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - b}$$

bleibt damit im Limes $z \rightarrow a$ beschränkt. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz hat g eine holomorphe Fortsetzung auf $D \cup \{a\}$. Aber dann hat

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$$

entweder eine hebbare Singularität (wenn $g(a) \neq 0$) oder einen Pol m ter Ordnung (wenn g eine Nullstelle m ter Ordnung in a hat) in a , also keine wesentliche Singularität. $\square$

5.2. Laurent-Reihen

Laurent-Reihen sind eine Verallgemeinerung von Potenzreihen, bei der man negative Exponenten erlaubt.

Definition 5.13. Sei $a \in \mathbb{C}$.

(i) Eine **Laurent-Reihe** mit Entwicklungspunkt a ist ein formaler Ausdruck

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

(ii) Eine Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ **konvergiert** in $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, wenn die zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

konvergieren. In diesem Fall definiert man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Die Begriffe der absoluten Konvergenz, gleichmäßigen Konvergenz usw. von einer Laurent-Reihe definiert man wie in Definition 5.13 über den Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$.

Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ in irgendeinem Punkt z_0 mit $|z_0 - a| = R$ konvergiert, dann konvergiert sie im offenen Ball $\{|z-a| < R\}$ absolut und gleichmäßig auf Kompakten und definiert dort eine holomorphe Funktion. Die zweite Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left((z-a)^{-1} \right)^n$$

kann man als Potenzreihe in der Variablen $w := (z-a)^{-1}$ auffassen. Wenn sie in irgendeinem Punkt z_1 mit $|z_1 - a|^{-1} = r^{-1}$ konvergiert, dann konvergiert sie in der offenen Menge

$$\{|z-a|^{-1} < r^{-1}\} = \{|z-a| > r\}$$

absolut und gleichmäßig auf Kompakten und ist dort holomorph. Das führt zur folgenden Erkenntnis:

Proposition 5.14. Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Laurent-Reihe, die in zwei Punkten $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ konvergiert mit

$$r := |z_1 - a| < |z_0 - a| =: R.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ absolut im **Ringgebiet**

$$\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\},$$

die Konvergenz ist gleichmäßig in kompakten Teilmengen von $\mathcal{R}$, und die so definierte Funktion ist auf $\mathcal{R}$ holomorph.

Die Ableitung einer Laurent-Reihe berechnet man gliedweise:

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1}.$$

Man beachte, dass der Koeffizient von $(z-a)^{-1}$ in einer abgeleiteten Laurent-Reihe $\frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ immer $0c_0 = 0$ ist.

Satz 5.15. Seien $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$, und

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

ein Ringgebiet. Sei $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann besitzt f eine eindeutige **Laurent-Zerlegung**: eine Zerlegung

$$f(z) = g(z-a) + h\left(\frac{1}{z-a}\right), \quad z \in \mathcal{R}$$

mit holomorphen Funktionen $g : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ und $h : B_{1/r}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(0) = 0$.

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $a = 0$ annehmen. Der allgemeine Fall führt man mit der Substitution $z \mapsto z - a$ auf $a = 0$ zurück. Die gesuchte Zerlegung hat dann die Form

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right).$$

Eindeutigkeit: Angenommen,

$$f(z) = g_1(z) + h_1\left(\frac{1}{z}\right) = g_2(z) + h_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

wären zwei solche Zerlegungen (ohne Einschränkung mit den gleichen Radien). Man definiere

$$G(z) := g_1(z) - g_2(z) = h_2\left(\frac{1}{z}\right) - h_1\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathcal{R}.$$

Die Darstellung von G als $g_1(z) - g_2(z)$ definiert ihre holomorphe Fortsetzung auf $\{|z| < R\}$, und die Darstellung als $h_2(1/z) - h_1(1/z)$ ist die holomorphe Fortsetzung auf $\{|z| > r\}$. Dadurch wird G zu einer ganzen Funktion, die außerdem beschränkt ist, da $h_1(1/z), h_2(1/z)$ auf $\{|z| \geq R\}$ beschränkt sind. Nach dem Satz von Liouville ist G konstant, und wegen der Annahme $h_1(0) = h_2(0) = 0$ ist $G \equiv 0$.

Existenz: Wir motivieren zuerst die Konstruktion. Angenommen, eine solche Zerlegung

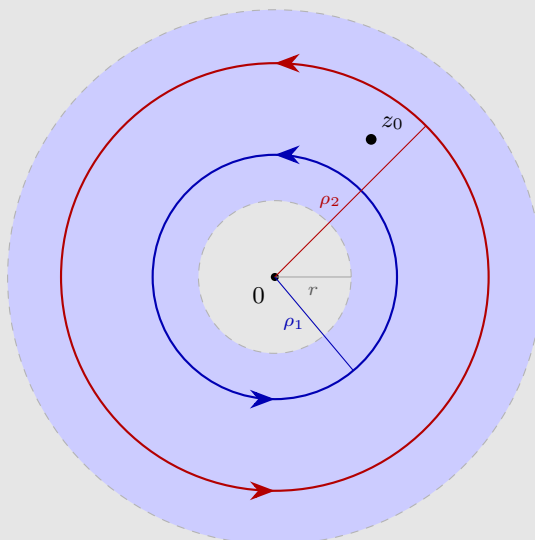
$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$$

existiert. Sei $z_0 \in \mathcal{R}$ fest und seien ρ_1, ρ_2 Radien mit

$$r < \rho_1 < |z_0| < \rho_2 < R.$$

Wir integrieren die Funktion $\frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0}$ entlang den positiv orientierten Kreisen von Radius ρ_1 bzw. ρ_2 um 0, wie in der Abbildung:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_1} \frac{g(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \frac{h(1/z)}{z - z_0} dz.$$



Die Funktion $\frac{g(z)}{z-z_0}$ ist im Inneren des Kreises von Radius ρ_1 holomorph, also

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_1} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 0.$$

Für den Kreis von Radius ρ_2 bekommen wir mit der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = g(z_0).$$

Für das Integral von h verwenden wir die Substitution $z = 1/w$.

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\rho_i} \frac{h(1/z)}{z-z_0} dz &= \oint_{|w|=\rho_i^{-1}} \frac{h(w)}{1/w-z_0} \cdot -\frac{dw}{w^2} \\ &= -\frac{1}{z_0} \oint_{|w|=\rho_i^{-1}} \frac{h(w)/w}{w-1/z_0} dw. \end{aligned}$$

Dabei ist $\rho_2^{-1} < 1/z_0 < \rho_1^{-1}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \frac{h(1/z)}{z-z_0} dz &= 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_1} \frac{h(1/z)}{z-z_0} dz &= -\frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_1^{-1}} \frac{h(w)/w}{w-1/z_0} dw = -\frac{1}{z_0} \cdot \frac{h(1/z_0)}{1/z_0} = -h(1/z_0). \end{aligned}$$

Die obigen Überlegungen zeigen, dass g und h als Integrale

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_2} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad |z| < R,$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_1} \frac{zf(w)}{1-zw} dw, \quad |z| < 1/r$$

definiert werden sollen. Dabei wählt man für jedes $z \in \mathcal{R}$ Radien ρ_1, ρ_2 mit $r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$. (Die Integrale hängen nach dem Cauchyschen Integralsatz nicht von der Wahl von ρ_1, ρ_2 ab.) Die Holomorphie von h in $z = 0$ folgt aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz und die gleichmäßige Konvergenz von $\frac{f(w)}{w-1/z}$ im Limes $z \rightarrow 0$ gegen 0 auf dem Kreis $\{|w| = \rho_1\}$.

Mit diesen Definitionen gilt

$$g(z) + h(1/z) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_2} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_1} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw,$$

denn

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_2} \frac{f(z)}{w-z} dw = f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_2} \frac{1}{w-z} dw = f(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho_1} \frac{f(z)}{w-z} dw = 0.$$

Aber $\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ hat nur eine hebbare Singularität in $w = z$ und definiert eine holomorphe Funktion im Ringgebiet. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\oint_{|w|=\rho_2} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \oint_{|w|=\rho_1} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw,$$

und damit $g(z) + h(1/z) - f(z) = 0$. □

Setzen wir in die Laurent-Zerlegung

$$f(z) = g(z-a) + h\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

die Entwicklungen von g und h als Potenzreihen ein, so bekommen wir die *Laurent-Entwicklung*:

Satz 5.16. Seien $0 \leq r < R \leq \infty$ Radien, $a \in \mathbb{C}$ und

$$\mathcal{R} = \{z : r < |z-a| < R\}$$

ein Ringgebiet. Jede holomorphe Funktion $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutige Darstellung als konvergente Laurent-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Für die Koeffizienten gilt die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

für jeden Radius $r < \rho < R$.

Beweis. Sei $f(z) = g(z-a) + h\left(\frac{1}{z-a}\right)$ die Laurent-Zerlegung von f und seien

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < R;$$

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n, \quad |z| < 1/r$$

die Potenzreihenentwicklungen von g und h um 0. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Die Darstellung ist eindeutig, weil die Laurent-Zerlegung und die Entwicklungen von g und h eindeutig sind. Die Koeffizientenformel folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta_{n-(k+1)=-1} \\ &= c_k. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 5.17. Wir berechnen die Laurent-Entwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

in den Ringgebieten $\{0 \leq |z| < 1\}$ und $\{1 < |z| < \infty\}$.

In der Kreisscheibe $|z| < 1$ gilt die Taylor-Entwicklung

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Im Ringgebiet $|z| > 1$ haben wir

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{w}} = -w \cdot \frac{1}{1-w}$$

für $|w| < 1$; mit der geometrischen Reihe und $w = 1/z$ bekommt man

$$f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = -w \cdot \frac{1}{1-w} = -\sum_{n=1}^{\infty} w^n = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

Beispiel 5.18. Wir berechnen die Laurent-Entwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$

in den Ringgebieten $\{0 \leq |z| < 1\}$ und $\{1 < |z| < 2\}$ und $\{2 < |z| < \infty\}$. Dazu verwendet man am besten die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Die Konstanten sind dabei

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}$$

und

$$B = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)f(z) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{3}.$$

Im Gebiet $0 \leq |z| < 1$ haben wir die Taylor-Entwicklungen

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 - \frac{11}{32}z^4 - \dots$$

Im Gebiet $1 < |z| < 2$ ist die Laurent-Zerlegung

$$f(z) = g(z) + h(1/z)$$

mit

$$g(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2}, \quad h(1/z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-1}.$$

Wir entwickeln die Taylor-Reihen

$$g(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n, \quad h(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{1-z} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

und erhalten die Laurent-Reihe

$$f(z) = g(z) + h(1/z) = \dots + \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{24}z^2 \pm \dots$$

Im Gebiet $2 < |z| < \infty$ ist die Laurent-Zerlegung $g = 0$ und

$$h(z) = f(1/z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z}-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z}+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{1-z} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{1+2z}.$$

Die Taylor-Entwicklung von $h(z)$ um $z = 0$ ist dabei

$$h(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n = z^2 - z^3 + 3z^4 - 5z^5 + 11z^6 \pm \dots$$

Wir bekommen die Laurent-Reihe

$$f(z) = z^{-2} - z^{-3} + 3z^{-4} - 5z^{-5} + 11z^{-6} \pm \dots$$

Die punktierte Umgebung $B_R^\circ(a) = \{z : 0 < |z-a| < R\}$ ist der spezielle Fall eines Ringgebiets mit innerem Radius 0. Eine holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer isolierten Singularität in a hat also eine Entwicklung um a als Laurent-Reihe,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R.$$

Anhand der Laurent-Reihe erkennt man die Art der Singularität:

$$\begin{aligned} a \text{ ist hebbar} &\Leftrightarrow c_n = 0 \quad \forall n < 0; \\ a \text{ ist ein Pol der Ordnung } m &\Leftrightarrow c_n = 0 \quad \forall n < -m \text{ und } c_{-m} \neq 0; \\ a \text{ ist wesentlich} &\Leftrightarrow c_n \neq 0 \text{ f\"ur unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Der negative Teil

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

der Laurent-Entwicklung von f in einer punktierten Umgebung von a nennt man den **Hauptteil** von f in a . Damit haben wir die Charakterisierung:

$$\begin{aligned} a \text{ ist hebbar} &\Leftrightarrow \text{kein Hauptteil;} \\ a \text{ ist ein Pol der Ordnung } m &\Leftrightarrow \text{endlicher Hauptteil;} \\ a \text{ ist wesentlich} &\Leftrightarrow \text{unendlicher Hauptteil.} \end{aligned}$$

Beispiel 5.19. Auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben die drei Exemplare für isolierte Singularitäten die folgenden Darstellungen als Laurent-Reihen:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\sin(z)}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \pm \dots; \\ \text{(ii)} \quad \frac{1}{z} &= z^{-1}; \\ \text{(iii)} \quad e^{1/z} &= \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n = \dots + \frac{1}{6} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-2} + z^{-1} + 1. \end{aligned}$$

5.3. Der Residuensatz

Der Residuensatz ist eine sehr praktische Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes für holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $a \notin D$ eine isolierte Singularität von f , und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r$$

die Entwicklung von f als Laurent-Reihe um a .

Definition 5.20. Das **Residuum** von f in a ist der Koeffizient von $(z-a)^{-1}$:

$$\text{Res}(f; z=a) = c_{-1}.$$

Bemerkung 5.21. Wenn $f(z)$ einen einfachen Pol (d.h. einen Pol erster Ordnung) in a hat, dann hat die Laurent-Reihe von $f(z)$ in einer punktierten Umgebung von a die Form

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Dann ist a eine hebbare Singularität von $(z-a) \cdot f(z)$, und es gilt

$$\text{Res}(f; z=a) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Beispiel 5.22. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$$

hat einfache Pole in den Punkten πn , $n \in \mathbb{Z}$. Das Residuum in πn ist

$$\lim_{z \rightarrow \pi n} \frac{z - \pi n}{\sin(z)} = \lim_{z \rightarrow \pi n} \frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\cos(\pi n)} = (-1)^n.$$

Bemerkung 5.23. Wenn f einen Pol m ter Ordnung ($m \geq 2$) in a hat, dann zeigt man mit einer ähnlichen Rechnung über der Laurent-Reihe um a :

$$\text{Res}(f; z = a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m f(z) \right).$$

Für große Ordnungen m kann diese Formel unhandlich werden.

Beispiel 5.24. Das Residuum der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ in $z = i$ (von Polordnung 2) ist $-\frac{i}{4}$. Dazu schreibt man

$$\frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^2} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right) = -\frac{2}{(z+i)^3}.$$

Im Limes $z \rightarrow i$ bekommen wir

$$\text{Res}(f; z = i) = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

Als Laurent-Koeffizient gilt für das Residuum eine Integralformel, die oft eine Anwendung der Leibniz-Regel (Differentiation unter dem Integralzeichen) erlaubt.

Beispiel 5.25. Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann hat die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right)$$

zwei einfache Pole in $z = a$ und $z = -a$, jeweils mit

$$\text{Res}(f; z = a) = \frac{1}{2a}, \quad \text{Res}(f; z = -a) = -\frac{1}{2a}.$$

Ableiten nach a gibt uns

$$\text{Res} \left(\frac{2a}{(z^2 - a^2)^2}; z = a \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2a} \right) = -\frac{1}{2a^2},$$

also

$$\text{Res} \left(\frac{1}{(z^2 - a^2)^2}; z = a \right) = \frac{1}{2a} \cdot -\frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{4a^3}.$$

In $a = i$ bekommen wir wieder

$$\text{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + 1)^2}; z = i \right) = -\frac{1}{4a^3} \Big|_{a=i} = -\frac{i}{4}.$$

Satz 5.26 (Residuensatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Seien $a_1, \dots, a_r \in D$ endlich viele Punkte und $\tilde{D} := D \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$. Sei $f : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $C \subseteq \tilde{D}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve. Dann gilt

$$\int_C f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^r \chi(C; a_j) \cdot \operatorname{Res}(f; z = a_j).$$

Beweis. Um jeden der Punkte a_j sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(j)} (z - a_j)^n, \quad |z - a_j| < \varepsilon$$

die Laurent-Entwicklung von f , sowie

$$h_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} (z - a_j)^n$$

der jeweilige Hauptteil. Die Reihe $h_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right)$ konvergiert dabei nach Definition der Laurent-Zerlegung in ganz $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$, insbesondere überall in D .

Sei

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^r h_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right).$$

Dann ist g eine auf D holomorphe Funktion, die in den Punkten a_j nur hebbare Singularitäten hat. Die holomorphe Fortsetzung von g auf $\tilde{D}$ bezeichnen wir auch mit g .

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_C g(z) \, dz = 0,$$

also

$$\int_C f(z) \, dz = \int_C \sum_{j=1}^r h_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) \, dz = \sum_{j=1}^r \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} \int_C (z - a_j)^n \, dz.$$

Für $n \neq -1$ hat $(z - a_j)^n$ eine Stammfunktion und das Integral ist 0. Im Fall $n = -1$ gilt

$$c_{-1}^{(j)} = \operatorname{Res}(f; z = a_j) \quad \text{und} \quad \int_C (z - a_j)^{-1} \, dz = 2\pi i \cdot \chi(C; a_j)$$

nach Definition der Umlaufzahl. Also gilt

$$\int_C f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^r \chi(C; a_j) \cdot \operatorname{Res}(f; z = a_j). \quad \square$$

Der Residuensatz folgt auch aus der Homologie-Version des Cauchyschen Integralsatzes. Man ersetzt die Kurve C durch einen zu C homologen Zyklus, der aus hinreichend kleinen Kreisen (mit den korrekten Umlaufzahlen) um den Punkten $a_1, \dots, a_r$ besteht. Auf jedem Kreis ersetzt man dann $f(z)$ durch die Laurent-Reihe und integriert gliedweise.

Beispiel 5.27. Sei C der (positiv orientierte) Einheitskreis. Wir berechnen das Integral

$$\oint_C \frac{dz}{(z-2)(1+4z^2)}.$$

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(1+4z^2)}$ hat einen einfachen Pol in $z = 2$, der außerhalb von C liegt, und für den das Residuum von f nicht zum Integral beiträgt, sowie einfache Pole in $z = \pm \frac{1}{2}i$. Wir bekommen

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-2)(1+4z^2)} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(f; z = \frac{1}{2}i \right) + \operatorname{Res} \left(f; z = -\frac{1}{2}i \right) \right) \\ &= 2\pi i \cdot \left(\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}i} \frac{z - i/2}{(z-2)(1+4z^2)} + \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}i} \frac{z + i/2}{(z-2)(1+4z^2)} \right) \\ &= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{(i/2-2)(8 \cdot i/2)} + \frac{1}{(-i/2-2)(8 \cdot (-i/2))} \right) \\ &= -\frac{2\pi i}{17}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.28. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)}, \quad z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}.$$

In jedem Ringgebiet $n\pi < |z| < (n+1)\pi$ hat $f(z)$ eine Entwicklung als Laurent-Reihe um $z = 0$.

Für $0 < |z| < \pi$ hat man die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1} = z^{-1} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \dots$$

mit

$$c_{2n-1} = \frac{2^{2n} - 2}{(2n)!} B_{2n}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Das folgt mit etwas Algebra aus der Definition der Bernoulli-Zahlen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Die Laurent-Entwicklungen in den anderen Ringgebieten bekommt man mit dem Residuensatz. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ die Darstellung im Gebiet $N\pi < |z| < (N+1)\pi$. Dann ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{\sin(z) z^{n+1}} dz, \quad N\pi < \rho < (N+1)\pi.$$

Mit dem Residuensatz bekommen wir

$$a_n = \sum_{j=-N}^N \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)z^{n+1}}; z = \pi j\right).$$

Das Residuum in $z = 0$ ist dabei der Koeffizient c_n der Laurent-Entwicklung von f in $0 < |z| < \pi$. Alle anderen Pole $z = \pi j$ sind einfach und das Residuum dort ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)z^{n+1}}; z = \pi j\right) = \lim_{z \rightarrow \pi j} \frac{z - \pi j}{\sin(z)z^{n+1}} = \frac{1}{\cos(\pi j)(\pi j)^{n+1}} = \frac{(-1)^j}{(\pi j)^{n+1}}.$$

Wir bekommen

$$a_n = c_n + \pi^{-n-1} \sum_{\substack{-N \leq j \leq N \\ j \neq 0}} \frac{(-1)^j}{j^{n+1}}.$$

5.4. Anwendungen des Residuensatzes

Manche reellen Integrale lassen sich durch eine geschickte Transformation in geschlossene Wegintegrale umwandeln, die man unter anderem mit dem Residuensatz bestimmen kann. Umgekehrt kann man, mit dem Residuensatz, Reihen über interessanten Residuen mithilfe von geeigneten Integralen berechnen.

Wir leiten jetzt einige allgemeine Integrationsformeln und Summationsformeln her.

1. Trigonometrische Integrale. Gegeben sei ein bestimmtes Integral der Form

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta.$$

Wir schreiben $z = e^{i\theta}$ und haben

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{z} dz \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \cdot \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta \quad (z = e^{i\theta}) \\ &= i \cdot I. \end{aligned}$$

Wenn die Funktion

$$g(z) := f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{z}$$

eine holomorphe Fortsetzung in $|z| < 1$ bis auf endlich vielen nicht-hebbaren Singularitäten $z = w_1, w_2, \dots, w_r$ besitzt, dann gilt (nach dem Residuensatz):

$$i \cdot I = 2\pi i \sum_{j=1}^r \operatorname{Res}(g; z = w_j),$$

also

$$I = 2\pi \sum_{j=1}^r \operatorname{Res}(g; z = w_j).$$

Wenn f eine rationale Funktion ist, dann ist g auch rational, alle w_j sind Pole und die Residuen lassen sich immer in geschlossener Form berechnen.

Beispiel 5.29. Wir bestimmen das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(\theta)} d\theta, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 1.$$

Sei dazu

$$g(z) := \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}.$$

Die Nullstellen von $z^2 + 2az + 1$ sind $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$; dabei liegt $w_1 := -a + \sqrt{a^2 - 1}$ innerhalb des Einheitskreises und $w_2 := -a - \sqrt{a^2 - 1}$ außerhalb. Nach dem obigen Prinzip gilt

$$I = 2\pi \cdot \operatorname{Res}(g; z = w_1) = 2\pi \cdot \lim_{z \rightarrow w_1} (z - w_1) \cdot \frac{2}{(z - w_1)(z - w_2)} = 2\pi \cdot \frac{2}{w_1 - w_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Beispiel 5.30. Wir bestimmen das Integral

$$I = \int_0^\pi \log(\sin(\theta)) d\theta.$$

Dazu schreibt man

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1 - e^{2i\theta}}{-2ie^{i\theta}}.$$

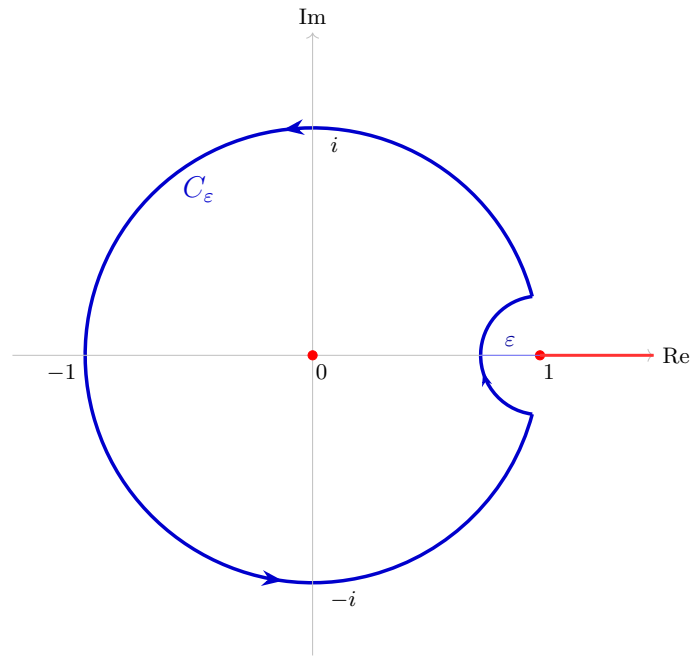
Der Trick dabei ist der komplexe Logarithmus

$$\operatorname{Log}(1 - e^{2i\theta}), \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Es gilt

$$\operatorname{Re} \left[\operatorname{Log}(1 - e^{2i\theta}) \right] = \log|1 - e^{2i\theta}| = \log \left| \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i} \right| = \log(\sin(\theta)) + \log(2).$$

$\operatorname{Log}(1-z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ und geht betragsmäßig im Limes $z \rightarrow 1$ logarithmisch schnell (d.h. langsam) gegen ∞ . Wir betrachten jetzt als Integrationsweg C_ε den Einheitskreis mit einer ausgeschnittenen ε -Umgebung von 1, vgl. Figur 5.1.



Figur 5.1: Integrationsweg

Nach dem Residuensatz (oder der Cauchyschen Integralformel) gilt

$$\oint_{C_\varepsilon} \frac{\text{Log}(1-z)}{z} dz = 2\pi i \cdot \text{Log}(1) = 0.$$

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ bekommen wir

$$\int_0^\pi \text{Log}(1 - e^{2i\theta}) d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\varepsilon} \text{Log}(1-z) \frac{dz}{2iz} = 0.$$

Der Realteil des Integrals ist dann

$$\int_0^\pi \left(\log(\sin(\theta)) + \log(2) \right) d\theta = 0.$$

Also

$$I = - \int_0^\pi \log(2) d\theta = -\pi \log(2).$$

2. Integrale von $-\infty$ nach ∞ . Sei $\mathbb{H} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ die obere Halbebene und

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine bis auf endlich vielen isolierten Singularitäten holomorphe Funktion, die eine stetig Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ besitzt.

Wenn f im Limes $|z| \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abklingt, dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) \, dx.$$

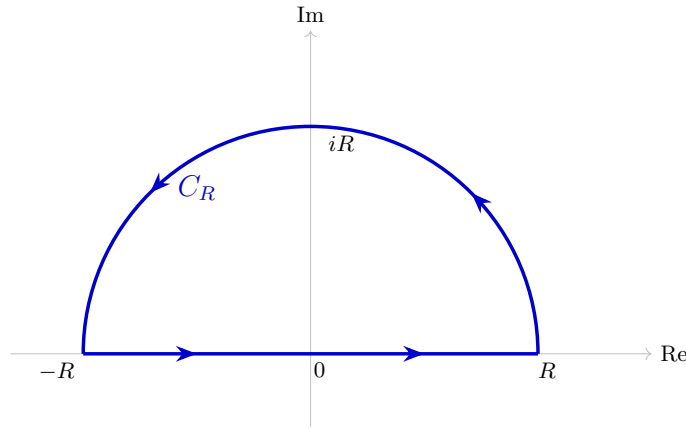
Man vervollständigt den Integrationsweg von $-R$ nach R durch den Kreisbogen γ_R von Radius R zu einer geschlossenen Kurve C_R , und erhält mit dem Residuensatz

$$\oint_{C_R} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{w \in \mathbb{H} \\ |w| < R}} \text{Res}(f; z = w).$$

(Genau genommen haben wir den Residuensatz nur in dem Fall bewiesen, dass der Integrationsweg innerhalb des Gebiets liegt. In diesem Fall gehört $[-R, R]$ zum Rand. Das Problem umgeht man z.B. mit der Rechnung $\int_{-R}^R f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R f(x + i\varepsilon) \, dx$, die wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf dem Kompaktum

$$\{x + iy : -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq 1\}$$

erlaubt ist.)



Figur 5.2: Integrationsweg

Im Limes $R \rightarrow \infty$ hoffen wir, dass das Integral entlang dem Kreisbogen C_R gegen 0 konvergiert. Wenn das der Fall ist, dann gilt die Integrationsformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{w \in \mathbb{H}} \text{Res}(f; z = w).$$

Satz 5.31. Es gelten die Voraussetzungen wie oben, sowie **eine** der folgenden Annahmen an f :

(i) Es gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \\ |z|=R}} R|f(z)| = 0;$$

(ii) $f(z)$ hat die Form $f(z) = e^{i\lambda z}g(z)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \\ |z|=R}} |g(z)| = 0.$$

Dann gilt die Integrationsformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{w \in \mathbb{H}} \text{Res}(f; z = w).$$

Beweis. Sei R_0 so groß, dass alle Singularitäten von f in $\mathbb{H}$ im Betrag kleiner R_0 sind. Dann gilt für jedes $R > 0$:

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{w \in \mathbb{H}} \text{Res}(f; z = w).$$

Wir schätzen das Integral entlang γ_R ab:

Fall (i): Mit der Standardabschätzung bekommen wir

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \\ |z|=R}} |f(z)| = 0.$$

Fall (ii): Diese Abschätzung nennt man das *Lemma von Jordan*. Sei $z = Re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$; dann gilt

$$\left| e^{i\lambda z} g(z) \right| = \left| e^{iR\lambda \cos(\theta)} \cdot e^{-R\lambda \sin(\theta)} \cdot g(z) \right| = e^{-R\lambda \sin(\theta)} |g(z)|.$$

Damit gilt

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} g(z) dz \right| \leq \left(\sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \\ |z|=R}} |g(z)| \right) \cdot \int_0^\pi Re^{-R\lambda \sin(\theta)} d\theta.$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass das Integral $\int_0^\pi Re^{-R\lambda \sin(\theta)} d\theta$ im Limes $R \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Dazu schreiben wir

$$\int_0^\pi Re^{-R\lambda \sin(\theta)} d\theta = 2R \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-R\lambda \sin(\theta)} d\theta$$

und verwenden wir die Abschätzung $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ für $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$:

$$\int_0^\pi Re^{-R\lambda \sin(\theta)} d\theta \leq 2R \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-2R\lambda\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{\lambda} (1 - e^{-R\lambda}) \leq \frac{\pi}{\lambda}. \quad \square$$

Beispiel 5.32. Fall (i) ist immer erfüllt, wenn $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen P, Q , $\text{grad}(Q) \geq \text{grad}(P) + 2$ und $Q \neq 0$ auf $\mathbb{R}$.
Mit $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ bekommen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z=i) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Fall (ii) ist immer erfüllt, wenn $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen P, Q , $\text{grad}(Q) \geq \text{grad}(P)+1$ und $Q \neq 0$ auf $\mathbb{R}$. Es gilt z.B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x-i} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{z-i}; z=i\right) = 2\pi i \cdot e^{i\lambda \cdot i} = 2\pi i e^{-\lambda}$$

für $\lambda > 0$.

Beispiel 5.33. Wir berechnen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0.$$

Dazu schreibt man

$$\frac{\cos(x)}{x^2+a^2} = \text{Re}\left[\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nach der Integrationsformel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}; z=ai\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \frac{(z-ai)e^{iz}}{z^2+a^2} = 2\pi i e^{-a} \cdot \frac{1}{2ai} = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a}.$$

Das gilt dann auch für den Realteil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a}.$$

Beispiel 5.34. Wir berechnen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\sqrt{x^2+1})}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0.$$

Dazu schreiben wir $\log(\sqrt{x^2+1}) = \text{Re}[\text{Log}(x+i)]$. Nach der Integrationsformel gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+a^2} dx &= 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+a^2}; z=ai\right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{\text{Log}(ai+i)}{2ai} \\ &= \frac{\pi}{a} \cdot \left(\log(1+a) + \frac{i\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Der Realteil ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\sqrt{x^2+1})}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a} \log(1+a).$$

Bemerkung 5.35. Das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \, d\theta$$

kann man mit der *Weierstraß-Substitution* $x = \cot(\theta/2)$ in

$$I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

als Spezialfall eines Integrals von $-\infty$ nach ∞ umwandeln (nachrechnen).
Zum Beispiel gilt für $a > 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin(\theta)} \, d\theta &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + \frac{2x}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ax^2 + 2x + a} \, dx \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

3. Integrale von 0 nach ∞ . In diesem Abschnitt kommen Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} x^a f(x) \, dx$$

vor. Dabei ist f die Einschränkung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ einer (bis auf isolierte Singularitäten) holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$. Keine Singularität von f darf in $\mathbb{R}_{>0}$ liegen.

Der Exponent a ist reell aber in der Regel nicht ganz, sodass x^a *nicht* die Einschränkung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ einer holomorphen Funktion ist. Das nutzen wir zu unserem Vorteil. Sei h die holomorphe Funktion

$$h : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = e^{a \cdot \text{Log}(-z)}.$$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_{>0}$ hat $h(z)$ zwei Grenzwerte im Limes $z \rightarrow x$:

(i) Wenn $z \rightarrow x$ aber $\text{Im}[z] < 0$, dann gilt

$$\text{Log}(-z) \longrightarrow \log(x) + \pi i,$$

also

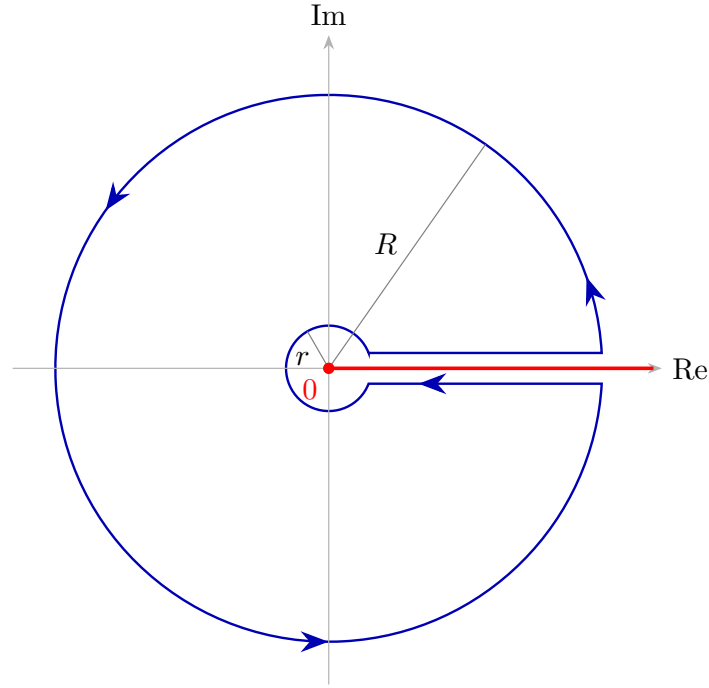
$$h(z) \longrightarrow x^a \cdot e^{\pi i a}.$$

(ii) Wenn $z \rightarrow x$ aber $\text{Im}[z] > 0$, dann gilt

$$\text{Log}(-z) \longrightarrow \log(x) - \pi i,$$

also

$$h(z) \longrightarrow x^a \cdot e^{-\pi i a}.$$



Figur 5.3: Integrationsweg

Man betrachtet jetzt das Integral von $h(z)f(z)$ entlang einem Kreis von Radius $R > 0$, aus dem einen Bogen um die nichtnegative reelle Achse ausgeschnitten ist, vgl. Figur.

Die Integrale entlang den Geradenabschnitten konvergieren im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen

$$\int_r^R x^a e^{-\pi i a} f(x) dx \quad (\text{in der oberen Halbebene})$$

und

$$- \int_r^R x^a e^{\pi i a} f(x) dx \quad (\text{in der unteren Halbebene}).$$

Wir nehmen an, dass die Funktion $f(z)$ hinreichend langsam wächst bzw. schnell abklingt, dass die Integrale von $h(z)f(z)$ auf den Kreisen im Limes $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren. Dann bleiben nur noch die Integrale entlang den Geradenabschnitten. Am Ende bekommt man mit dem Residuensatz:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}(h \cdot f; z = w) &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C(\varepsilon, r, R)} h(z)f(z) dz \\ &= \int_0^\infty x^a e^{-\pi i a} f(x) dx - \int_0^\infty x^a e^{\pi i a} f(x) dx \\ &= -2i \sin(\pi a) \int_0^\infty x^a f(x) dx, \end{aligned}$$

und damit die Integrationsformel

$$\int_0^\infty x^a f(x) dx = -\frac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot \sum_{w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \operatorname{Res}(h \cdot f; z = w).$$

Proposition 5.36. *Sei f eine bis auf isolierte Singularitäten in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$ und es gelte*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{a+1} \cdot \sup_{|z|=R} |f(z)| = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{a+1} \sup_{|z|=r} |f(z)| = 0.$$

Dann konvergiert das Integral $\int_0^\infty x^a f(x) dx$ absolut und es gilt

$$\int_0^\infty x^a f(x) dx = -\frac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot \sum_{w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \operatorname{Res}(h \cdot f; z = w).$$

N.B. Mit der Substitution $x = t^2$ gilt formal

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^a f(x) dx &= 2 \int_0^\infty t^{2a+1} f(t^2) dt \\ &= \frac{2}{1 - e^{2\pi i a}} \int_0^\infty (t^{2a+1} + (-t)^{2a+1}) f(t^2) dt \\ &= \frac{2}{1 - e^{2\pi i a}} \int_{-\infty}^\infty t^{2a+1} f(t^2) dt. \end{aligned}$$

Auf dieser Weise reduziert sich das Integral auf ein Integral von $-\infty$ nach ∞ . Das Integral in der Nähe von $t = 0$ muss man aber geeignet definieren.

Beispiel 5.37. Sei $-1 < a < 2$ und $a \neq 0, 1$. Dann ist die Formel für $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^3} dx$ anwendbar. Die Singularitäten sind einfach und liegen in den Punkten $e^{\pi i/3}$, -1 und $e^{5\pi i/3}$ und es gilt

$$h(e^{\pi i/3}) = \exp\left(a \cdot \operatorname{Log}(-e^{\pi i/3})\right) = e^{-2\pi i a/3},$$

$$h(-1) = \exp(a \cdot \operatorname{Log}(1)) = 1,$$

$$h(e^{5\pi i/3}) = \exp\left(a \cdot \operatorname{Log}(-e^{5\pi i/3})\right) = e^{2\pi i a/3}.$$

Die Residuen von $h \cdot f$ in $z = \zeta$, $\zeta \in \{e^{\pi i/3}, -1, e^{5\pi i/3}\}$ sind

$$\operatorname{Res}(h \cdot f; z = \zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} h(z) \frac{z - \zeta}{1 + z^3} = h(\zeta) \cdot \frac{1}{3\zeta^2},$$

d.h.

$$\operatorname{Res}(h \cdot f; z = e^{\pi i/3}) = e^{-2\pi i a/3} \cdot \frac{1}{3e^{2\pi i/3}} = \frac{1}{3} e^{-2\pi i(a+1)/3}$$

und

$$\operatorname{Res}(h \cdot f; z = -1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

und

$$\operatorname{Res}(h \cdot f; z = e^{5\pi i/3}) = e^{2\pi i a/3} \cdot \frac{1}{3e^{10\pi i/3}} = \frac{1}{3} e^{2\pi i(a+1)/3}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^3} dx &= -\frac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot \left(\frac{1}{3} e^{2\pi i(a+1)/3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-2\pi i(a+1)/3} \right) \\ &= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1 + 2 \cos(2\pi(a+1)/3)}{\sin(\pi a)}. \end{aligned}$$

Im Limes $a \rightarrow 0$ bekommen wir übrigens mit der Regel von L'Hospital:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\frac{4\pi}{3} \sin(2\pi(a+1)/3)}{\pi \cos(\pi a)} = -\frac{\pi}{3} \cdot -\frac{4}{3} \cdot \sin(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. Summationsformeln.

Mit dem Residuensatz

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{Res}(f; a_j) \chi(C; a_j)$$

lassen sich auch Reihen summieren. In dieser Anwendung verwendet man ein Integral entlang einer Jordan-Kurve, dessen Wert (normalerweise 0, evtl. nach einem Limes) mit anderen Methoden leichter zu berechnen ist. Die rechte Seite

$$2\pi i \cdot \sum \operatorname{Res}(f; a_j)$$

ist dagegen nichttrivial und interessant.

Wir machen den folgenden Ansatz: Sei eine zu bestimmende Reihe

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

gegeben. Sei f eine bis auf isolierte Singularitäten w_j , $j = 1, 2, \dots$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die die Folge a_n interpoliert: $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$. (Die ganzen Zahlen dürfen noch nicht zu den Singularitäten von f gehören.) Sei t eine *summatorische Funktion*: eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ mit einfachen Polen in $\mathbb{Z}$. Für jede einfache geschlossene Kurve C in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt nach dem Residuensatz die allgemeine Summenformel

$$\oint_C f(z)t(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \in \operatorname{Inn}(C)}} a_n \cdot \operatorname{Res}(t; z = n) + 2\pi i \sum_{w_j \in \operatorname{Inn}(C)} \operatorname{Res}(f \cdot t; z = w_j).$$

Diese Summenformel ist derart allgemein, dass sie kaum anzuwenden ist. Im Folgenden fixieren wir die *summatorischen Funktionen*

$$t(z) := \pi \cot(\pi z), \quad s(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

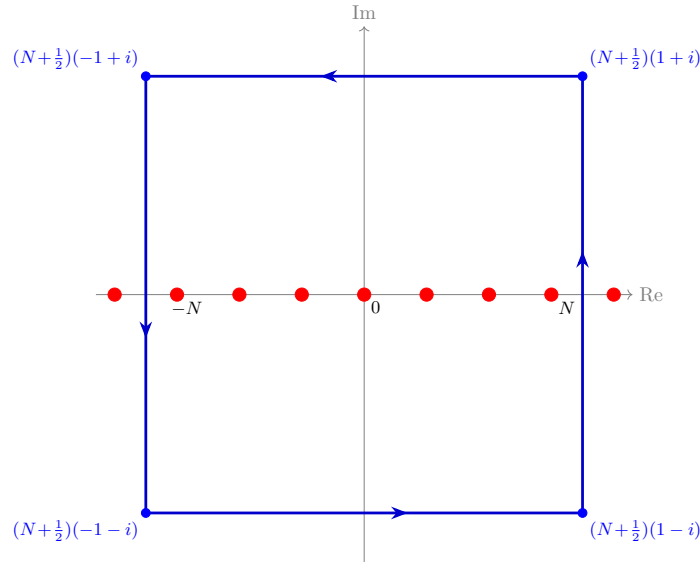
Diese Funktionen haben einfache Pole genau in den ganzen Zahlen, und man findet:

$$\operatorname{Res}(t; z = n) = \lim_{z \rightarrow n} \pi \cos(n\pi) \frac{z - n\pi}{\sin(\pi z)} = 1$$

und

$$\operatorname{Res}(s; z = n) = \lim_{z \rightarrow n} \pi \frac{z - n\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^n.$$

Die Integrationskurve ist das positiv orientierte Quadrat Q_N mit den Eckpunkten $(N + 1/2)(\pm 1 \pm i)$.



Figur 5.4: Integrationsweg

Aus der Formel

$$t(z) = \pi \cot(\pi z) = \pi i \cdot \frac{1 + e^{-2\pi iz}}{1 - e^{-2\pi iz}}$$

bekommt man auf den waagerechten Geradenabschnitten die Abschätzung

$$|t(z)| \leq \pi \cdot \frac{1 + |e^{-2\pi iz}|}{1 - |e^{-2\pi iz}|} = \pi \frac{1 + e^{-2\pi(N+1/2)}}{1 - e^{-2\pi(N+1/2)}} \leq 2\pi,$$

denn $1 + e^{-y} \leq 2(1 - e^{-y})$ für $y \geq \log(3)$. Auf den senkrechten Abschnitten $x = \pm(N+1/2)$ gilt

$$t(x + iy) = \pi i \cdot \frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}}$$

und damit auch

$$|t(x + iy)| = \pi |\tanh(\pi y)| \leq 2\pi.$$

Also gilt

$$|t(z)| \leq 2\pi, \quad z \in Q_N,$$

überall auf dem Integrationsweg. Für $s(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ findet man nach einer ähnlichen Rechnung die gleiche Abschätzung

$$|s(z)| \leq 2\pi, \quad z \in Q_N.$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ bekommen wir die versprochene Summationsformel:

Satz 5.38. *Sei f eine bis auf isolierte Singularitäten $w_1, w_2, \dots$ holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Es gelte*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \sup_{|z|=R} |f(z)| = 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{-N \leq n \leq N \\ n \neq w_j}} f(n) = -\pi \cdot \sum_{w_j} \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z); z = w_j\right)$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{-N \leq n \leq N \\ n \neq w_j}} (-1)^n f(n) = -\pi \cdot \sum_{w_j} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}; z = w_j\right).$$

Beweis. Unter dieser Annahme gilt nach der Standardabschätzung:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \oint_{Q_N} f(z) t(z) dz \right| = 0.$$

Andererseits gilt nach dem Residuensatz:

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{Q_N} f(z) t(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{w \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}\left(f(z) t(z); z = w\right).$$

In den Punkten $n \in \mathbb{Z}$, die keine Singularitäten von f sind, hat $f(z)t(z)$ einen einfachen Pol mit Residuum $f(n)$; in den Singularitäten von f gilt

$$\operatorname{Res}(f(z)t(z); z = w) = \pi \cdot \operatorname{Res}(f(z) \cot(\pi z); z = w).$$

Das beweist die erste Formel; die zweite Formel beweist man analog mit $s(z)$ anstelle von $t(z)$. $\square$

Beispiel 5.39. Sei $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Dann gilt

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^2} = -\pi \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}; z=0\right).$$

Man hat

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi} z^{-1} - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi^3}{45} z^3 - \frac{2\pi^5}{945} z^5 - \dots$$

Das Residuum von $\frac{\cot(\pi z)}{z^2}$ in $z=0$ ist also $-\frac{\pi}{3}$, und wir bekommen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Mit dem gleichen Argument findet man für jede gerade Zahl $k \geq 2$:

$$2\zeta(k) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^k} = -\pi \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^k}; z=0\right).$$

Mit anderen Worten: die Entwicklung von $\cot(\pi z)$ als Laurent-Reihe um $z=0$ ist

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi} z^{-1} - \frac{2}{\pi} \zeta(2) z - \frac{2}{\pi} \zeta(4) z^3 - \frac{2}{\pi} \zeta(6) z^5 - \dots$$

Es gilt z.B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Beispiel 5.40. Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und sei

$$f(z) := \frac{1}{a+z} + \frac{1}{a-z} = \frac{2a}{(a+z)(a-z)}.$$

Dann sind die Voraussetzungen der Summationsformel erfüllt, und wir haben

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = -\pi \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z); z=a\right) - \pi \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z); z=-a\right).$$

In $z=a$ ist das Residuum

$$\operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z); z=a\right) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \cot(\pi z) = -\cot(\pi a);$$

in $z=-a$ ist das Residuum

$$\operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z); z=-a\right) = \lim_{z \rightarrow -a} (z+a) f(z) \cot(\pi z) = \cot(-\pi a) = -\cot(\pi a).$$

Insgesamt haben wir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = 2\pi \cot(\pi a).$$

Da $\frac{1}{a+n}$ und $\frac{1}{a-n}$ ($-N \leq n \leq N$) die gleichen Zahlen durchlaufen, bekommen wir die *Partialbruchzerlegung des Kotangens*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{a+n} = \pi \cot(\pi a), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 5.41. Sei $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ und sei

$$\tilde{t}(z) := t(z) - \pi i = \pi \cot(\pi z) - \pi i.$$

Dann ist auch $\tilde{t}(z)$ eine summatorische Funktion, d.h. $\text{Res}(\tilde{t}; z = n) = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $\text{Res}(\tilde{t}; z = w) = 0$ für $w \notin \mathbb{Z}$. Für diese Funktion gilt auch eine von N unabhängige Abschätzung

$$|e^{i\lambda z} \tilde{t}(z)| \leq 2\pi \cdot \max\left(1, \frac{1}{1 + e^{-2\pi y}}\right) \leq 2\pi e^\pi$$

auf Q_N (Nachrechnen. Für $t(z) = \pi \cot(\pi z)$ würde das nicht gelten!) Damit haben wir, wenn $f(z)$ die gleichen Annahmen wie in Satz 5.38 erfüllt, die allgemeinere Summationsformel

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq w_j}} f(n) e^{i\lambda n} &= - \sum_{w_j} \text{Res}\left(f(z) \tilde{t}(z); z = w_j\right) \\ &= -2\pi i \sum_{w_j} \text{Res}\left(\frac{f(z) e^{i\lambda z}}{e^{2\pi i z} - 1}; z = w_j\right). \end{aligned}$$

Beispiel 5.42. Seien $\lambda, a > 0$, $a \notin \mathbb{Z}$. Mit $f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}$ bekommen wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda n}}{n^2 - a^2} = -2\pi i \sum_{w=\pm a} \text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{(z^2 - a^2)(e^{2\pi i z} - 1)}; z = w\right).$$

Die Residuen sind dabei

$$\text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{(z^2 - a^2)(e^{2\pi i z} - 1)}; z = a\right) = \frac{e^{i\lambda a}}{e^{2\pi i a} - 1} \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{z^2 - a^2} = \frac{e^{i\lambda a}}{2a(e^{2\pi i a} - 1)}$$

und

$$\text{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{(z^2 - a^2)(e^{2\pi i z} - 1)}; z = -a\right) = \frac{e^{-i\lambda a}}{e^{-2\pi i a} - 1} \lim_{z \rightarrow -a} \frac{z + a}{z^2 - a^2} = \frac{e^{-i\lambda a}}{-2a(e^{-2\pi i a} - 1)}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda n}}{n^2 - a^2} &= 2\pi i \left(\frac{e^{i\lambda a}}{2a(e^{2\pi i a} - 1)} - \frac{e^{-i\lambda a}}{2a(e^{-2\pi i a} - 1)} \right) \\ &= \frac{\pi i}{a} \cdot \frac{e^{i(\lambda - \pi)a}}{e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}} + \frac{\pi i}{a} \cdot \frac{e^{i(\pi - \lambda)a}}{e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}} \\ &= \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\cos((\lambda - \pi)a)}{\sin(\pi a)}. \end{aligned}$$

Im Limes $\lambda \rightarrow 0$ erkennt man die Partialbruchzerlegung des Kotangens wieder.

5. Inversionsformeln.

Die allgemeine Aufgabe in diesem Abschnitt ist die Darstellung einer holomorphen Funktion $f(z)$ durch Potenzen einer anderen Funktion $g(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n.$$

Im Spezialfall $g(z) = z - a$ ist das die Taylor-Entwicklung. Der Spezialfall $f(z) = z$ ist dagegen das Bestimmen einer Umkehrfunktion von g .

Sei $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Nullstelle in $a \in D$:

$$g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0.$$

Nach Lemma 4.7 existieren $\varepsilon > 0$ und $r > 0$, sodass für jede Zahl $|b| < r$ die Gleichung $g(z) = b$ eine eindeutige Lösung z_b mit $|z_b - a| < \varepsilon$ besitzt. Sei

$$f : \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion. Wenn es eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \phi(g(z)), \quad \phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

gibt, dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho} \frac{\phi(w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\phi(g(z))}{g(z)^{n+1}} g'(z) dz \quad (w = g(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)g'(z)}{g(z)^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Dabei ist ρ ein beliebiger Radius $0 < \rho < r$ und C die Urbildkurve von $|w| = \rho$ unter g . Nach dem Prinzip vom Argument ist die Umlaufzahl der Kurve C um $z = a$ genau 1; nach dem Residuensatz gilt also

$$a_n = \text{Res}\left(\frac{f(z)g'(z)}{g(z)^{n+1}}; z = a\right).$$

Umgekehrt definiere man $a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)g'(z)}{g(z)^{n+1}} dz$. Für $|w| < \inf_{z \in C} |g(z)|$ sei

$$\begin{aligned} \phi(w) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)g'(z)w^n}{g(z)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)g'(z)}{g(z) - w} dz. \end{aligned}$$

Dann gilt in der Tat nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}
\phi(g(\zeta)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)g'(z)}{g(z) - g(\zeta)} dz \\
&= \text{Res}\left(\frac{f(z)g'(z)}{g(z) - g(\zeta)}; z = \zeta\right) \\
&= \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) \frac{g'(z)(z - \zeta)}{g(z) - g(\zeta)} \\
&= f(\zeta).
\end{aligned}$$

Wir haben bewiesen:

Satz 5.43 (Inversionsformel von Lagrange–Bürmann). *Unter den obigen Voraussetzungen gilt die Formel*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n, \quad a_n = \text{Res}\left(\frac{f(z)g'(z)}{g(z)^{n+1}}; z = a\right).$$

Beispiel 5.44. Die *Lambertsche W-Funktion* ist eine inverse Funktion von $g(z) = ze^z$. Hier gilt $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$, und damit ist g auf einer Umgebung von $z = 0$ invertierbar. Nach der Formel von Lagrange–Bürmann gilt

$$z = W(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n$$

mit

$$\begin{aligned}
a_n &= \text{Res}\left(\frac{z(1+z)e^z}{z^{n+1}e^{(n+1)z}}; z = 0\right) \\
&= \text{Res}\left(\frac{(1+z)e^{-nz}}{z^n}; z = 0\right)
\end{aligned}$$

Dieses Residuum ist der Koeffizient von z^{n-1} in der Entwicklung von $(1+z)e^{-nz}$ um $z = 0$. Für $n = 0$ gilt $a_0 = 0$. Da

$$(1+z)e^{-nz} = (1+z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-n)^k}{k!} + \frac{(-n)^{k-1}}{(k-1)!} \right) z^k,$$

ist der Koeffizient a_n , $n > 0$ gleich

$$\frac{(-n)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-n)^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{(-n)^{n-2}}{(n-1)!} \cdot \left((-n) + (n-1) \right) = -\frac{(-n)^{n-2}}{(n-1)!} = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.$$

Also hat $W(z)$ um $z = 0$ die Entwicklung

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n = z - z^2 + \frac{3}{2}z^3 - \frac{16}{6}z^4 \pm \dots$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist dabei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-n)^{n-1}}{n!} \middle/ \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \right| = \frac{1}{e}.$$

Man findet nach Definition von W die Identität $\lim_{z \rightarrow -1/e} W(z) = -1$ (denn $-1 \cdot e^{-1} = -1/e$). Setzt man $z = -1/e$ in die Potenzreihe ein, dann ergibt sich

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{e^n n!}.$$

Beispiel 5.45. Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Für $|w|$ hinreichend klein bestimmen wir eine Lösung $z = z(w)$ der Gleichung

$$z^d - z + w = 0.$$

$z(w)$ ist dann eine Umkehrfunktion von $g(z) = z - z^d$. Da $g(0) = 0$ und $g'(0) \neq 0$, ist g in einer Umgebung von $z = 0$ tatsächlich invertierbar: es gibt in der Nähe von $w = 0$ eine eindeutige Lösung $z = z(w)$ mit $z(0) = 0$. Und zwar

$$z(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \text{Res} \left(\frac{z(1 - dz^{d-1})}{(z - z^d)^{n+1}}; z = 0 \right) \\ &= \text{Res} \left(\frac{1 - dz^{d-1}}{z^n(1 - z^{d-1})^{n+1}}; z = 0 \right) \\ &= \text{Koeffizient von } z^{n-1} \text{ in } \frac{1 - dz^{d-1}}{(1 - z^{d-1})^{n+1}}. \end{aligned}$$

Man hat

$$\frac{1}{(1 - z^{d-1})^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^{k(d-1)}$$

und damit

$$\frac{1 - dz^{d-1}}{(1 - z^{d-1})^{n+1}} = (1 - dz^{d-1}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^{k(d-1)}.$$

Der Koeffizient ist 0, außer wenn $n-1 = k(d-1)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt; in diesem Fall ist der Koeffizient

$$\binom{n+k}{k} - d \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{kd+1}{k} - d \binom{kd}{k-1} = \frac{(kd)!}{k!(kd+1-k)!}.$$

Damit gilt

$$z(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(kd)!}{k!(kd+1-k)!} w^{1+k(d-1)} = w + w^d + dw^{2d-1} + \frac{d(3d-1)}{2} w^{3d-2} + \dots$$

5.5. Meromorphe Abbildungen und die Riemann'sche Zahlenkugel

Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen haben wir als hebbar, wesentlich oder Pole klassifiziert. Dabei sind Pole a von f durch

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$$

charakterisiert.

In diesem Abschnitt fügen wir zu $\mathbb{C}$ ein neues Element ∞ hinzu. Wir untersuchen die Natur von ∞ als „isolierte Singularität“ von auf $\mathbb{C}$ definierten Funktionen und fassen ∞ als „Wert“ von Funktionen in Polen auf.

Definition 5.46. Die Riemann'sche Zahlenkugel ist $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Auf $\hat{\mathbb{C}}$ definieren wir eine Topologie. Eine **Umgebung von** ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine Teilmenge $M \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ mit den Eigenschaften: $\infty \in M$, und es existiert ein $r > 0$ mit

$$z \in \mathbb{C}, |z| > r \implies z \in M.$$

Eine Teilmenge $\hat{U} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ heißt dann **offen**, wenn:

- (i) $U := \hat{U} \cap \mathbb{C}$ ist offen als Teilmenge von $\mathbb{C}$; und
- (ii) wenn $\infty \in \hat{U}$, dann enthält $\hat{U}$ eine Umgebung von ∞ .

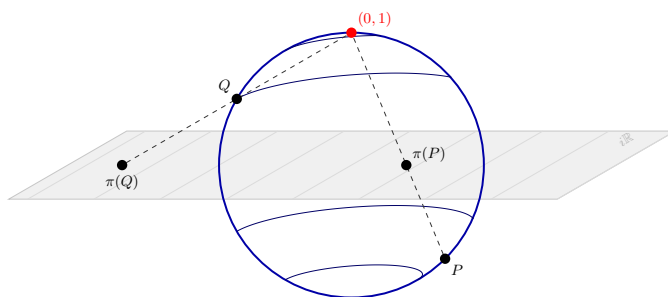
Bemerkung 5.47. Als topologischer Raum ist $\hat{\mathbb{C}}$ äquivalent zur Kugeloberfläche

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 = 1\} \cong \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}.$$

(Daher der Name.) Die stereographische Projektion

$$\pi : S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \pi(z, t) := \begin{cases} z/(1-t) : & (z, t) \neq (0, 1); \\ \infty : & (z, t) = (0, 1); \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus.



Figur 5.5: Stereographische Projektion und die Riemann'sche Zahlenkugel

Insbesondere ist $\hat{\mathbb{C}}$ wie S^2 ein kompakter Raum!

Das Ringgebiet $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ verstehen wir als punktierte Umgebung von ∞ . Die Abbildung $\varphi : z \mapsto 1/z$ bildet punktierte Umgebungen $\{z : 0 < |z| < r\}$ von 0 auf punktierte Umgebungen $\{z : |z| > 1/r\}$ von ∞ ab und umgekehrt. Mit den Definitionen

$$\frac{1}{0} := \varphi(0) = \infty, \quad \frac{1}{\infty} := \varphi(\infty) = 0$$

ist die Funktion $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto z^{-1}$ also stetig.

Definition 5.48. Sei f eine auf einer punktierten Umgebung von ∞ holomorphe Funktion,

$$f : \mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

f hat in ∞ eine **hebbare Singularität**, **Pol** oder **wesentliche Singularität**, wenn die Funktion

$$g : \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1/r\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(w) := f(1/w)$$

eine hebbare Singularität bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität in $w = 0$ hat.

Die Art der Singularität in ∞ erkennt man auch an der Laurent-Entwicklung von f im Ringgebiet $|z| > r$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Die Singularität ist genau dann hebbbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$; die Singularität ist ein Pol der Ordnung $N \geq 1$, wenn $a_N \neq 0$ aber $a_n = 0$ für $n \geq N + 1$; und die Singularität ist wesentlich, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n \geq 0$.

Beispiel 5.49. (i) Ein Polynom von Grad $d \geq 1$,

$$P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0, \quad a_d \neq 0$$

hat einen Pol der Ordnung d in ∞ .

(ii) Jede ganze Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die kein Polynom ist, hat in ∞ eine wesentliche Singularität. Denn f hat eine Darstellung als überall konvergierende Potenzreihe,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

und damit hat $f(1/z) = \sum_{n=-\infty}^0 a_{-n} z^n$ eine Laurent-Entwicklung um 0 mit unendlichem Hauptteil.

(iii) Die Funktion $\cot(\pi z)$ hat keine isolierte Singularität in ∞ , weil die Folge der Pole $z = n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ gegen ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$ konvergiert.

Mit dem Begriff der Singularität in ∞ lassen sich unmittelbar holomorphe Funktionen auf $\hat{\mathbb{C}}$ definieren:

Definition 5.50. Sei $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ offen und $\infty \in D$. Eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist **holomorph**, wenn f auf $D \setminus \{\infty\}$ holomorph ist und in ∞ eine hebbare Singularität hat.

Bemerkung 5.51. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann hat f genau dann eine hebbare Singularität in ∞ , wenn f beschränkt ist. Der Satz von Liouville lässt sich damit umformulieren:

Jede holomorphe Funktion $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant!

Definition 5.52. Sei $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ offen und $S \subseteq D$ eine diskrete Teilmenge. Eine Funktion $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ heißt **meromorph**, wenn:

- (i) $S = f^{-1}(\{\infty\})$;
- (ii) f ist auf $D \setminus S$ holomorph und hat einen Pol (irgendeiner Ordnung) in jedem Punkt $w \in S$.

Weil ein Pol a durch $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ charakterisiert ist, gilt: jede meromorphe Funktion ist als Funktion $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ stetig.

Die auf einem Gebiet $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen bilden einen Körper. Denn nach dem Identitätssatz liegen die Nullstellen einer von 0 verschiedenen meromorphen Funktion f auch diskret in D . Diese sind dann genau die Polstellen von $1/f$.

(Der Ring der meromorphen Funktionen auf einer nicht zusammenhängenden offenen Teilmenge ist natürlich kein Körper.)

Proposition 5.53. Jede meromorphe Funktion $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ist rational:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \text{ Polynome, } Q \neq 0.$$

Der Körper der meromorphen Funktionen auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist also $\mathbb{C}(z)$.

Beweis. Da $\hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist die diskrete Menge $S \subset \hat{\mathbb{C}}$ der Polstellen endlich. Seien $a_1, \dots, a_r$ die endlichen Polstellen von f (d.h. $S = \{a_1, \dots, a_r\}$ oder $S = \{a_1, \dots, a_r, \infty\}$) und $n_1, \dots, n_r$ die jeweiligen Polordnungen. Dann hat

$$g(z) := (z - a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (z - a_r)^{n_r} \cdot f(z)$$

nur hebbare Singularitäten in $\mathbb{C}$. Also definiert $g(z)$ eine ganze Funktion. Sei

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

die Entwicklung von g um $z = 0$ als Potenzreihe; da g höchstens einen Pol in ∞ hat, ist diese Potenzreihe endlich und damit $g = P$ ein Polynom. Also gilt $f = P/Q$ mit $P = g$ und $Q = \prod_{j=1}^r (z - a_j)^{n_j}$. $\square$

Definition 5.54. Sei f eine auf einer punktierten Umgebung von ∞ holomorphe Funktion

$$f : \mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad r > 0$$

mit Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > r.$$

Das **Residuum** von f in ∞ ist

$$\operatorname{Res}(f; z = \infty) := -a_{-1}.$$

Diese Definition ist auf den ersten Blick ein wenig merkwürdig, da eine in ∞ holomorphe Funktion ein nichttriviales Residuum haben kann. Im Allgemeinen hat nach dieser Definition das Residuum von $f(z)$ in $z = \infty$ nicht viel mit dem Residuum von $g(w) := f(1/w)$ in $w = 0$ zu tun.

Das sollte man auch nicht erwarten. Für Residuen gilt nämlich die Substitutionsformel

$$\operatorname{Res}(f(\phi(z))\phi'(z); z = w) = \operatorname{Res}(f(\zeta); \zeta = \phi(w)),$$

die man am Einfachsten mit dem Residuensatz nachrechnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(\zeta); \zeta = \phi(w)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint f(\phi(z))\phi'(z) dz, \quad \zeta = \phi(z) \\ &= \operatorname{Res}(f(\phi(z))\phi'(z), z = w). \end{aligned}$$

(Für Laurent-Reihen um 0 der Form $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ kann man die Substitutionsformel auch direkt herleiten.) Deswegen ist die Definition

$$\operatorname{Res}(f(z); z = \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right); w = 0\right) = -a_{-1}$$

naheliegend.

Bemerkung 5.55. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $0 < |z-a| < \varepsilon$. Wenn man a_{-1} als Residuum der Differentialform $f(z)dz$ und nicht der Funktion f definiert, dann bleibt das Residuum unter Variablenwechsel erhalten. Denn die Substitution $z = z(w)$ verwandelt $f(z)dz$ in $f(z(w))z'(w)dw$.

Für ∞ gilt auch der Residuensatz in der folgenden Form:

Proposition 5.56. Sei $r > 0$ und $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Sei $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion und $\rho > r$ ein Radius, sodass keine Singularität von f den Betrag ρ hat. Dann gilt

$$\oint_{|z|=\rho} f(z) dz = -2\pi i \sum_{\substack{\zeta \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ |\zeta| > \rho}} \text{Res}\left(f(z); z = \zeta\right).$$

Beweis. Wir substituieren $z = 1/w$. Während z den Kreis von Radius ρ um 0 einmal positiv durchläuft, durchläuft w den Kreis um 0 von Radius ρ^{-1} in der negativen Richtung. Das Vorzeichen von $-\frac{1}{w^2} dw$ hebt sich wegen der umgekehrten Orientierung weg und wir haben

$$\oint_{|z|=\rho} f(z) dz = \oint_{|w|=\rho^{-1}} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{1}{w^2} dw.$$

Die Funktion $g(w) := \frac{1}{w^2} f(1/w)$ ist im Kreis $|w| < \rho^{-1}$ (bis auf isolierte Singularitäten) holomorph und wir bekommen

$$\oint_{|z|=\rho} f(z) dz = \oint_{|w|=\rho^{-1}} g(w) dw = 2\pi i \cdot \sum_{|\zeta| < \rho} \text{Res}\left(g(w); w = \zeta\right).$$

Nach der Transformationsformel für Residuen gilt

$$\text{Res}\left(g(w); w = \zeta\right) = -\text{Res}\left(f(z); z = \zeta^{-1}\right),$$

auch gegebenenfalls für $\zeta = 0$ und $\zeta^{-1} = \infty$. Das beweist die Aussage. $\square$

Korollar 5.57. Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ eine bis auf endlich viele isolierte Singularitäten holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\sum_{w \in \hat{\mathbb{C}}} \text{Res}(f(z); z = w) = 0.$$

Beweis. Sei ρ ein beliebiger Radius, für den keine Singularitäten von f auf dem Kreis $|z| = \rho$ liegen. Man berechnet das Integral $\oint_{|z|=\rho} f(z) dz$ auf zwei Wegen:

$$\sum_{|w| < \rho} \text{Res}(f(z); z = w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz = - \sum_{\substack{w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ |w| > \rho}} \text{Res}(f(z); z = w). \quad \square$$

Beispiel 5.58. Wir bestimmen das Integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

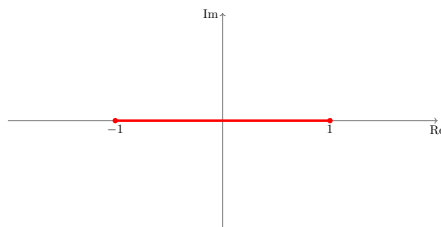
Dazu verwenden wir eine holomorphe Quadratwurzel $\sqrt{1 - z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Das kann man wie folgt konstruieren:

Sei $w = 1/z$. In der w -Ebene ist die Funktion

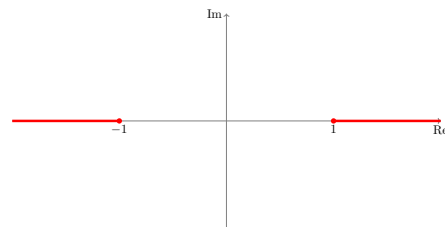
$$w^2 - 1 = w^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{w^2}\right)$$

auf $D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 1] \cup [1, \infty))$ nullstellenfrei. Weil D ein Elementargebiet ist, existiert eine holomorphe Quadratwurzel $w\sqrt{1 - 1/w^2}$. Darin substituieren wir $w = 1/z$ wieder. (Vgl. Figur 5.6.)

Dabei kann man $\sqrt{1 - z^2}$ so auswählen, dass im Limes $z \rightarrow x \in [-1, 1]$, $\text{Im}[z] < 0$ der Wert von $\sqrt{1 - z^2}$ gegen den positiven Wurzel $\sqrt{1 - x^2}$ konvergiert. (Sonst multipliziert man $\sqrt{1 - z^2}$ mit -1 .) Dann muss im Limes $z \rightarrow x \in [-1, 1]$, $\text{Im}[z] > 0$ die Funktion $\sqrt{1 - z^2}$ gegen $-\sqrt{1 - x^2}$ konvergieren. (Wenn $\sqrt{1 - z^2}$ auch gegen $\sqrt{1 - x^2}$ konvergieren würde, dann wäre $\sqrt{1 - z^2}$ auf ganz $\mathbb{C}$ stetig und nach einer Übungsaufgabe sogar holomorph. Aber dann hätte $\sqrt{1 - z^2}$ Nullstellen unsinniger Ordnung in $z = \pm 1$.)



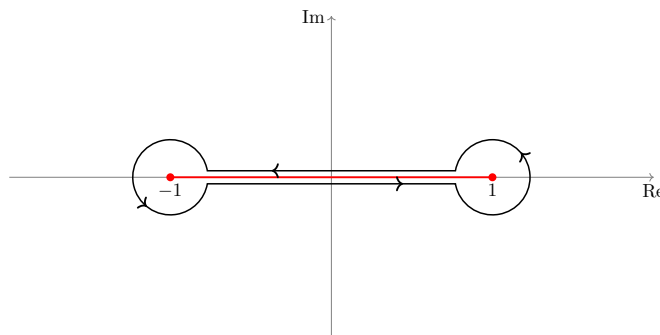
(a) Die z -Ebene



(b) Die w -Ebene

Figur 5.6: Unter $z \mapsto w = 1/z$ wird $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ auf ein Elementargebiet abgebildet.

Jetzt integrieren wir entlang einer Kurve γ , die das Intervall $[-1, 1]$ einmal umläuft.



Figur 5.7: Integrationsweg

Einerseits kann man die Integrationskurve beliebig nah ans Intervall $[-1, 1]$ zusammenziehen;

das Integral bleibt dabei ungeändert. Wegen Stetigkeit gilt

$$\oint_{\gamma} \sqrt{1-z^2} \, dz = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx + \int_1^{-1} -\sqrt{1-x^2} \, dx = 2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

Andererseits gilt nach dem Residuensatz:

$$\oint_{\gamma} \sqrt{1-z^2} \, dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\sqrt{1-z^2}; z = \infty\right).$$

Die Laurent-Entwicklung von $\sqrt{1-z^2}$ im Ringgebiet $|z| > 1$ lautet

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{-z^2 \cdot (1-1/z^2)} = iz - \frac{i}{2}z^{-1} - \frac{i}{8}z^{-3} - \dots$$

(Dass die Entwicklung nicht $-iz + \frac{i}{2}z^{-1} + \dots$ ist, sieht man z.B. daran, dass der Wert in $z = -iy$, $y > 0$ positiv sein muss.) Das Residuum ist also $\frac{i}{2}$ und es gilt

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \oint_{\gamma} \sqrt{1-z^2} \, dz = -2\pi i \cdot \frac{i}{2} = \pi.$$

6. Konforme Abbildungen

6.1. Konforme Abbildungen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 6.1. Eine **konforme Abbildung** auf D ist eine injektive holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

Lemma 6.2. Sei $f : D \rightarrow E = f(D)$ eine konforme Abbildung. Dann gilt:
(i) f' ist nullstellenfrei auf D ;
(ii) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : E \rightarrow D$ ist ebenso holomorph.

Damit ist f^{-1} eine konforme Abbildung von E auf D .

Beweis. (i) Angenommen, es existiert $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) = 0$. Dann ist a eine Nullstelle der Funktion $g(z) = f(z) - f(z_0)$ von Ordnung $N \geq 2$. Nach Proposition 4.14 existiert eine Umgebung U von z_0 und ein $\varepsilon > 0$, sodass für jede komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < \varepsilon$, die Gleichung

$$f(z) - f(z_0) = g(z) = a$$

in U genau N Lösungen hat. Insbesondere ist f nicht bijektiv; ein Widerspruch.

(ii) Sei $a \in D$. Da $f'(a) \neq 0$, existiert eine Umgebung von a , auf der die inverse Funktion nach der Inversionsformel von Lagrange-Bürmann durch eine explizite Potenzreihe gegeben ist. Damit ist f^{-1} analytisch, also holomorph. $\square$

Existiert eine bijektive, holomorphe (also konforme) Abbildung $f : D \rightarrow E$, dann heißen D und E **konform äquivalent**. Konforme Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf offenen Teilmengen oder Teilgebieten von $\mathbb{C}$.

Die Hauptprobleme dieses Kapitels sind die folgenden Fragen:

- (i) Wann sind zwei Teilgebiete von $\mathbb{C}$ konform äquivalent?
- (ii) Gegeben Teilgebiete $D, E \subseteq \mathbb{C}$, kann man eine konforme Äquivalenz $f : D \rightarrow E$ explizit hinschreiben?
- (iii) Kann man *alle* konforme Abbildungen $f : D \rightarrow E$ bestimmen?

Frage (iii) ist äquivalent zur Bestimmung der *Automorphismengruppe*

$$\text{Aut}(D) = \{f : D \rightarrow D : f \text{ konform}\}.$$

$\text{Aut}(D)$ ist immer eine Gruppe, mit der Verknüpfung von Funktionen als Gruppenoperation und mit der Abbildung $\iota(z) = z$ als neutrales Element.

Beispiel 6.3. Aus der konformen Äquivalenz von D und E folgt die topologische Äquivalenz (Homöomorphie) und sogar C^∞ -Äquivalenz (Diffeomorphie) von D und E . Aber auch Diffeomorphie ist nicht hinreichend für konforme Äquivalenz!

Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Dann ist $\mathbb{E}$ diffeomorph zu ganz $\mathbb{C}$: Man betrachte z.B. die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = \frac{z}{1 - |z|^2},$$

also $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(re^{it}) = \frac{r}{1-r^2}e^{it}$ ($0 < r < 1$). Diese Funktion ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{E}, \quad \varphi^{-1}(re^{it}) = \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}e^{it} = \frac{2r}{1+\sqrt{1+4r^2}}e^{it}, \quad (r > 0),$$

und $\varphi^{-1}(0) = 0$. Insgesamt also $\varphi^{-1}(z) = \frac{2}{1+\sqrt{1+4|z|^2}}z$. Die Funktionen φ und φ^{-1} sind unendlich oft differenzierbar, also Diffeomorphismen.

Nach dem Satz von Liouville kann es überhaupt keine nichtkonstante holomorphe Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ geben, geschweige denn eine konforme Äquivalenz!

6.2. Möbiustransformationen

Unser Ziel ist jetzt die Bestimmung einiger einfachen Automorphismengruppen.

Proposition 6.4. *Jede injektive holomorphe Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$ und hat die Form

$$\varphi(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

Insbesondere gibt es keine konforme Äquivalenz zwischen $\mathbb{C}$ und irgendeiner echten Teilmenge $D \subsetneq \mathbb{C}$!

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv. Dann hat φ in ∞ eine isolierte Singularität. Diese Singularität kann nicht wesentlich sein: sonst kann man mit dem Satz von Casorati–Weierstraß zeigen, dass φ nicht injektiv sein kann. Nach dem Satz von Liouville kann φ auch keine hebbare Singularität in ∞ haben.

Also hat φ einen Pol in ∞ , d.h. φ ist ein Polynom. Da φ' keine Nullstellen hat, muss φ

nach dem Fundamentalsatz der Algebra von der Form $\varphi(z) = az + b$ sein. Umgekehrt ist jede solche Abbildung $\varphi(z) = az + b$ tatsächlich ein Automorphismus von $\mathbb{C}$ mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}$. $\square$

Definition 6.5. Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \quad ad - bc \neq 0$$

eine invertierbare (2×2) -Matrix. Die zu M assoziierte **Möbiustransformation** ist die meromorphe Funktion

$$\varphi_M : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \varphi_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Bemerkung 6.6. (i) Falls $c \neq 0$, hat φ_M eine hebbare Singularität in ∞ mit der holomorphen Fortsetzung

$$\varphi_M(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Wenn $c = 0$, dann hat φ_M einen Pol in ∞ von erster Ordnung und man setzt $\varphi_M(\infty) = \infty$. Auf dieser Weise definiert φ_M eine meromorphe Abbildung

$$\varphi_M : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}.$$

(ii) Die Funktion φ_M bestimmt die Matrix M nur bis auf ein Vielfaches: es gilt

$$\varphi_M = \varphi_N \Leftrightarrow M = t \cdot N \text{ für ein } t \in \mathbb{C}^\times.$$

(iii) Die Automorphismen $\varphi(z) = az + b$ von $\mathbb{C}$ sind Möbiustransformationen zu den Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Lemma 6.7. Seien $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ invertierbare Matrizen und MN ihr Matrixprodukt. Dann gilt

$$\varphi_{MN}(z) = \varphi_M(\varphi_N(z)).$$

Beweis. Das zeigt man mit einer direkten Rechnung. Sei $M = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix}$, sodass

$$MN = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_M a_N + b_M c_N & a_M b_N + b_M d_N \\ c_M a_N + d_M c_N & c_M b_N + d_M d_N \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\varphi_M(\varphi_N(z)) &= \frac{a_M \frac{a_N z + b_N}{c_N z + d_N} + b_M}{c_M \frac{a_N z + b_N}{c_N z + d_N} + d_M} \\
&= \frac{a_M(a_N z + b_N) + b_M(c_N z + d_N)}{c_M(a_N z + b_N) + d_M(c_N z + d_N)} \\
&= \frac{(a_M a_N + b_M c_N)z + (a_M b_N + b_M d_N)}{(c_M a_N + d_M c_N)z + (c_M b_N + d_M d_N)} = \varphi_{MN}(z). \quad \square
\end{aligned}$$

Die zur Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ assoziierte Möbiustransformation ist offenbar $\varphi_I(z) = z$. Aus $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ folgt

$$\varphi_{M^{-1}} \circ \varphi_M(z) = \varphi_M \circ \varphi_{M^{-1}}(z) = z;$$

d.h. die Möbiustransformation φ_M ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi_M^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$.

Die Möbiustransformationen bilden damit eine Gruppe bzgl. der Verkettung. Die Abbildung

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \{\text{Möbiustransformationen}\}, \quad M \mapsto \varphi_M$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Der Kern besteht aus den Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die die Identität $\varphi_M(z) = z$ induzieren. Das sind genau die Matrizen der Form $M = tI$ mit $t \in \mathbb{C}^\times$.

Auf dieser Weise identifiziert man die Gruppe der Möbiustransformationen mit der Quotientengruppe

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / (\mathbb{C}^\times \cdot I).$$

Bemerkung 6.8. Unter den Möbiustransformationen gibt es einige Klassen, die geometrisch einfacher zu beschreiben sind. Nämlich die Translationen

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}; \quad \varphi_{T_a}(z) = z + a;$$

die Drehstreckungen

$$D_b = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}^\times; \quad \varphi_{D_b}(z) = bz;$$

und die Inversion (oder Stürzung)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_J(z) = -z^{-1}.$$

z und $\varphi(z)$ liegen auf einer gemeinsamen Gerade durch 0 und das Produkt ihrer Längen ist 1.

Jede Möbiustransformation kann als Verkettung solcher einfachen Transformationen geschrieben werden. Für $c = 0$ haben wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = d \cdot \begin{pmatrix} a/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und für $c \neq 0$ haben wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (ad-bc)/c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese letzte Matrixgleichung entspricht der Identität

$$\frac{az+b}{cz+d} = \lambda \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}, \quad \lambda := -\frac{ad-bc}{c^2}.$$

Proposition 6.9. *Die Möbiustransformationen sind genau die bijektiven meromorphen Abbildungen*

$$\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}.$$

Wir nennen solche Funktionen *Automorphismen* von $\hat{\mathbb{C}}$. Also: Die Automorphismengruppe der Riemann'schen Zahlenkugel ist

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \text{Möbiustransformationen } \varphi_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \right\}.$$

Beweis. (i) Wenn $\varphi(\infty) = \infty$, dann ist $\varphi|_{\mathbb{C}}$ ein Automorphismus von $\mathbb{C}$. Nach Proposition 6.4 ist $\varphi(z) = az+b = \frac{az+b}{0z+1}$ eine Möbiustransformation.

(ii) Sei sonst $w \in \mathbb{C}$ das Urbild von ∞ unter φ . Sei $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ so gewählt, dass ∞ auf w unter der Transformation φ_M abgebildet wird, etwa

$$M = \begin{pmatrix} w & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\varphi \circ \varphi_M$ ein Automorphismus, der ∞ auf ∞ abbildet. Nach (i) ist $\varphi \circ \varphi_M = \varphi_N$ eine Möbiustransformation. Daher ist $\varphi = \varphi_N \circ \varphi_M^{-1} = \varphi_{NM^{-1}}$ eine Möbiustransformation. $\square$

Proposition 6.10. *Seien $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Möbiustransformation φ_M , die*

$$\varphi_M(w_1) = 0, \quad \varphi_M(w_2) = 1, \quad \varphi_M(w_3) = \infty$$

abbildet.

Mit anderen Worten: die Gruppe der Möbiustransformationen operiert einfach transitiv auf der Menge aller Tupel dreier Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Existenz: falls ∞ nicht unter w_1, w_2, w_3 vorkommt, definieren wir

$$\varphi_M(z) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{z - w_1}{z - w_3}.$$

Diese Transformation ist genau so konstruiert, dass $\varphi_M(w_1) = 0$, $\varphi_M(w_2) = 1$, $\varphi_M(w_3) = \infty$ gilt. In den Ausnahmefällen $w_j = \infty$, $j = 1, 2, 3$ bilden wir den Grenzwert in der Definition von φ_M :

$$\begin{aligned} w_1 = \infty &\implies \varphi_M(z) = \frac{w_2 - w_3}{z - w_3}; \\ w_2 = \infty &\implies \varphi_M(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3}; \\ w_3 = \infty &\implies \varphi_M(z) = \frac{z - w_1}{w_2 - w_1}. \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit reicht es zu beweisen, dass eine Möbiustransformation, die 0, 1 und ∞ als Fixpunkte hat, notwendig $\varphi(z) = z$ sein muss. Aus $\varphi(\infty) = \infty$ folgt, dass φ von der Form

$$\varphi(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

ist; aus $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ folgt $b = 0$ und $a = 1$. □

Satz 6.11. Die Automorphismen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ sind genau die Möbiustransformationen der Form

$$\phi_{a,\zeta}(z) = \zeta \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{E}, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| = 1.$$

Beweis. (i) Wir zeigen, dass $\phi_{a,\zeta} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ gilt:

Für $|z| = 1$ haben wir

$$|z - a| = |\bar{z} - \bar{a}| = |z| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = |z\bar{z} - \bar{z}a| = |1 - \bar{a}z|.$$

Also gilt

$$|z| = 1 \implies |\phi_{a,\zeta}(z)| = |\zeta| \cdot \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} = 1.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt $|z| < 1 \implies |\phi_{a,\zeta}(z)| < 1$.

$\phi_{a,\zeta} = \varphi_M$ ist die zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \zeta & -\zeta a \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix}$$

assoziierte Möbiustransformation. Dabei ist $\det(M) = \zeta - \zeta|a|^2 \neq 0$, da $|a| < 1$. Also definiert $\phi_{a,\zeta}$ einen Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ mit Umkehrabbildung

$$\phi_{a,\zeta}^{-1}(z) = \varphi_{M^{-1}}(z) = \frac{z + \zeta a}{\bar{a}z + \zeta} = \zeta^{-1} \frac{z + \zeta a}{1 + \bar{\zeta} a z} = \phi_{-\zeta a, \zeta^{-1}}(z),$$

die wieder eine Abbildung von der selben Form ist. Insbesondere bildet $\phi_{a,\zeta}^{-1}$ auch $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$ ab. Also gilt $\phi_{a,\zeta} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$.

(ii) Sei $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ beliebig.

Wenn $\varphi(0) = 0$ gilt, dann können wir das Lemma von Schwarz an φ und φ^{-1} verwenden. Für jedes $z \in \mathbb{E}$ gilt

$$|\varphi(z)| \leq |z| = |\varphi^{-1}\varphi(z)| \leq |\varphi(z)|$$

und damit $\varphi(z) = \zeta z$ für eine komplexe Zahl ζ mit $|\zeta| = 1$.

Im allgemeinen Fall sei $a \in \mathbb{E}$ das Urbild von 0 unter φ . Die Abbildung $\phi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ bildet auch a auf 0 ab, sodass

$$\varphi \circ \phi^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{E}), \quad \varphi \circ \phi^{-1}(0) = 0$$

gilt. Nach dem obigen Paragraphen ist $\varphi \circ \phi^{-1}(z) = \zeta z$ mit einer Konstante $|\zeta| = 1$. Also gilt

$$\varphi(z) = \zeta \phi(z) = \zeta \frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \quad \square$$

Bemerkung 6.12. Sei $\zeta = e^{i\theta}$. Mit $u := e^{i\theta/2}$ und $v := -e^{i\theta/2}a$ bekommt man die symmetrische Darstellung

$$\phi(z) = \zeta \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{uz+v}{\bar{v}z+\bar{u}} = \varphi_M(z), \quad M = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \det(M) = |u|^2 - |v|^2 = 1 - |a|^2 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Nach Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}$ erreichen wir die Normalform

$$M = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \det(M) = 1.$$

Matrizen von dieser Form sind durch die Gleichung

$$M^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

charakterisiert, d.h. diese Matrizen bilden die Gruppe $\text{SU}(1, 1)$. Die Automorphismengruppe ist eigentlich der Quotient dieser Gruppe modulo $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\text{Aut}(\mathbb{E}) = \text{PSU}(1, 1) = \text{SU}(1, 1) / \{\pm I\}.$$

Als letztes Beispiel besprechen wir die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

Vermöge der Cayley-Transformation wird $\mathbb{H}$ mit der Einheitskreisscheibe identifiziert:

Lemma 6.13. *Die Abbildung*

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

definiert eine konforme Äquivalenz $\varphi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$.

Beweis. φ ist die Möbiustransformation zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Da $M^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ist

$$\varphi^{-1}(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Wir müssen die Inklusionen $\varphi(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{E}$ und $\varphi^{-1}(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{H}$ zeigen.

(i) Für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ gilt

$$|z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2 < x^2 + (y + 1)^2 = |z + i|^2.$$

Daher gilt $|\varphi(z)| < 1$.

(ii) Für $z \in \mathbb{E}$ gilt

$$\varphi^{-1}(z) = i \cdot \frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{|1 - z|^2} = -\frac{2y}{|1 - z|^2} + i \cdot \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} \in \mathbb{H}, \quad z = x + iy,$$

weil $\frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} > 0$. □

Proposition 6.14. *Die Automorphismen von $\mathbb{H}$ sind genau die Möbiustransformationen*

$$\varphi_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Wie in den früheren Beispielen ist die tatsächliche Automorphismengruppe die

Quotientengruppe modulo $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}.$$

Beweis. Sei

$$\varphi_C(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

die Cayley-Transformation. Dann gilt

$$f \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \Leftrightarrow \varphi_C \circ f \circ \varphi_C^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{E}).$$

Aber die Automorphismen von $\mathbb{E}$ sind genau die Möbiustransformationen der Form

$$\varphi_N, \quad N = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in \text{SU}(1, 1).$$

Die Automorphismen von $\mathbb{H}$ sind daher die Möbiustransformationen

$$f = \varphi_C^{-1} \circ \varphi_N \circ \varphi_C = \varphi_{C^{-1}NC}$$

zu Matrizen $C^{-1}NC$. Für den Beweis ist nur noch zu zeigen:

$$N \in \text{SU}(1, 1) \Leftrightarrow C^{-1}NC \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Für $N = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ ist

$$C^{-1}NC = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}[u+v] & -\text{Im}[u-v] \\ \text{Im}[u+v] & \text{Re}[u-v] \end{pmatrix}$$

reell. Umgekehrt ist für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$;

$$CMC^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$$

mit $u = \frac{a+d}{2} + i\frac{-b+c}{2}$, $v = \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2}$. Außerdem sind die Determinanten von $\det(N)$ und $\det(C^{-1}NC)$ gleich. Damit haben wir $N \in \text{SU}(1, 1) \Leftrightarrow C^{-1}NC \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ bewiesen. $\square$

6.3. Elementare Beispiele

Wir konstruieren jetzt Beispiele für konforme Äquivalenz mithilfe der Möbiustransformationen und einiger elementaren Funktionen, damit wir ein Gefühl für den Begriff der konformen

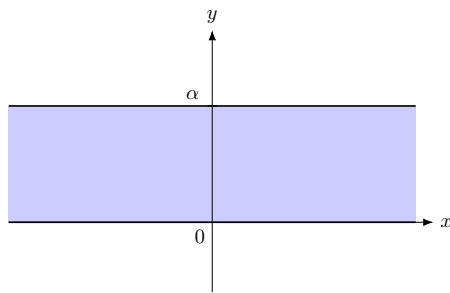
Äquivalenz bekommen.

Proposition 6.15. Sei $0 < \alpha < 2\pi$. Dann definiert die Abbildung

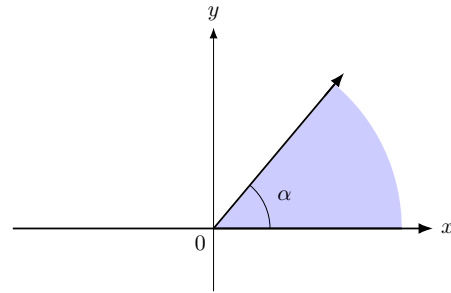
$$f : D \xrightarrow{\sim} E, \quad f(z) = e^z$$

eine konforme Äquivalenz zwischen den folgenden Gebieten:

- (i) Das Streifengebiet $D = \{z = x + iy : 0 < y < \alpha\}$;
- (ii) Das Winkelgebiet $E = \{w = re^{i\theta} : 0 < r < \infty, 0 < \theta < \alpha\}$.



(a) D



(b) E

Figur 6.1: Unter $z \mapsto e^z$ wird D auf E konform abgebildet.

Beweis: für $z = x + iy \in D$ ist $e^z = e^x \cdot e^{iy} \in E$. Umgekehrt hat $w = re^{i\theta} \in E$ ($0 < r < \infty, 0 < \theta < \alpha$) das eindeutige Urbild $z = \log(r) + i\theta \in D$.

Als Spezialfall ist E die obere Halbebene für $\alpha = \pi$, und die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $\alpha = 2\pi$.

Beispiel 6.16. (i) Alle Streifen $\{z = x + iy : y_1 < y < y_2\}$ sind konform äquivalent. Dazu kann man affin-lineare Transformationen $z \mapsto az + b$ verwenden. Nach der Proposition sind alle solchen Streifen auch konform äquivalent zur oberen Halbebene $\mathbb{H}$.

(ii) Die Abbildung

$$z \mapsto z^2$$

ist eine konforme Äquivalenz von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das kann man direkt nachrechnen, oder mit der Konstruktion

$$\mathbb{H} \xrightarrow[\substack{\sim \\ z \mapsto \text{Log}(z)}} \{x + iy : 0 < y < \pi\} \xrightarrow[\substack{\sim \\ z \mapsto 2z}] \{x + iy : 0 < y < 2\pi\} \xrightarrow[\substack{\sim \\ z \mapsto e^z}] \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$

einsehen.

(iii) Die Abbildung

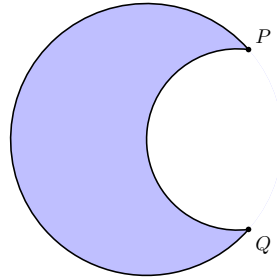
$$z \mapsto \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$$

ist eine konforme Äquivalenz von $\mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Das kann man als Verkettung

$$\mathbb{E} \xrightarrow[\substack{\sim \\ z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}}]{\sim} \mathbb{H} \xrightarrow[\substack{\sim \\ z \mapsto z^2}]{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow[\substack{\sim \\ z \mapsto -z}]{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

konstruieren. Die erste Abbildung $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$ ist die inverse Cayley-Transformation.

Beispiel 6.17. (i) Sei D das Sichelgebiet, das von zwei Kreisbögen umrandet wird, vgl. Abbildung. Seien P, Q die Schnittpunkte der zwei Bögen und sei φ eine Möbiustransformation,



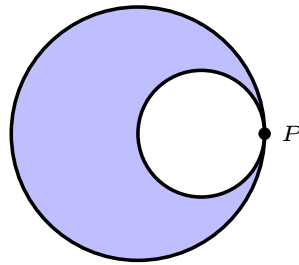
Figur 6.2: Das Gebiet D

die P auf ∞ und Q auf 0 abbildet. Dann werden beide Bögen unter φ auf Geraden abgebildet (vgl. Hausaufgaben) und $\varphi(D)$ ist damit ein Winkelgebiet der Form

$$\varphi(D) = \{w = re^{i\theta} : 0 < r < \infty, \theta_1 < \theta < \theta_2\}.$$

Nach einer weiteren Rotation erhalten wir das Winkelgebiet E aus der Proposition. Damit ist D wie E konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe.

(ii) Im Limes $P \rightarrow Q$ wird D zu einer Differenz zweier Kreisscheiben mit einer gemeinsamen Tangente, vgl. Abbildung. Durch eine Möbius-Transformation, die P auf ∞ abbildet,



Figur 6.3: Das Gebiet D

wird dieses Gebiet nicht mit einem Winkelgebiet, sondern mit einem Streifen konform identifiziert. Nach den obigen Überlegungen bekommen wir trotzdem eine konforme Äquivalenz zwischen D und der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.

Proposition 6.18. Die Joukowski-Transformation

$$J(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

definiert eine konforme Äquivalenz von

$$D = \mathbb{H} \cap \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}[z] > 0\}$$

auf die untere Halbebene $\mathbb{H}_- = \{z : \operatorname{Im}[z] < 0\}$.

Beweis. Für $z = re^{i\theta} \in D$, $0 < \theta < \pi$ ist

$$\operatorname{Im} J(z) = \frac{r - r^{-1}}{2} \sin(\theta) < 0,$$

da $r < r^{-1}$. Damit ist $J(z) \in \mathbb{H}_-$. Umgekehrt ist für $w \in \mathbb{H}_-$ die Gleichung $J(z) = w$ äquivalent zur Gleichung

$$z^2 - 2wz + 1 = 0.$$

Auf ∂D hat diese Gleichung für keinen Wert von $w \in \mathbb{H}_-$ eine Nullstelle. (Für $|z| = 1$, etwa $z = e^{i\theta}$, ist $J(z) = \cos(\theta)$ reell, und für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $J(z)$ reell. In beiden Fällen kann $J(z)$ nicht gleich w sein.) Nach dem Prinzip vom Argument hängt die Anzahl der Nullstellen von $z^2 - 2wz + 1 = 0$ in D nicht von w ab. Für $w = -i$ (z.B.), und damit für jedes w , findet man eine eindeutige Lösung. Damit ist $J : D \rightarrow \mathbb{H}_-$ bijektiv. $\square$

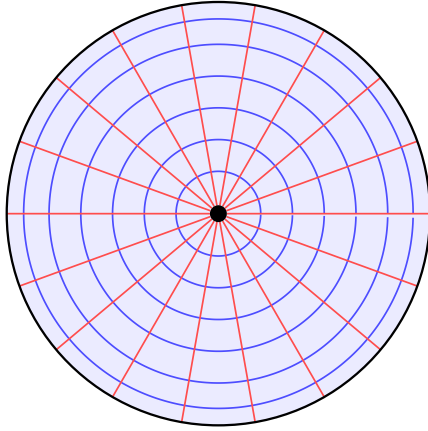
N.B. Die direkte Anwendung des Prinzips vom Argument ist etwas schwieriger, da $J(z)$ ein Pol am Rand von D hat (in $z = 0$). Die Abbildung J bildet das Intervall $(0, 1)$ bijektiv auf $(\infty, 1)$ ab; den Halbkreis auf das Intervall $[1, -1]$ ab (da $J(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$), und das Intervall $(-1, 0)$ auf $(-1, -\infty)$ ab. Daher umläuft die Bildkurve von $J(z) - w$ (eine Gerade) den Ursprung $1/2$ mal, wenn $\operatorname{Im}[w] < 0$ ist, und $-1/2$ mal, wenn $\operatorname{Im}[w] > 0$ ist. Der anscheinende Widerspruch ist der Beitrag des Pols in $z = 0$.

Beispiel 6.19. Aus demselben Grund bildet $J(z)$ die untere Halbkreisscheibe

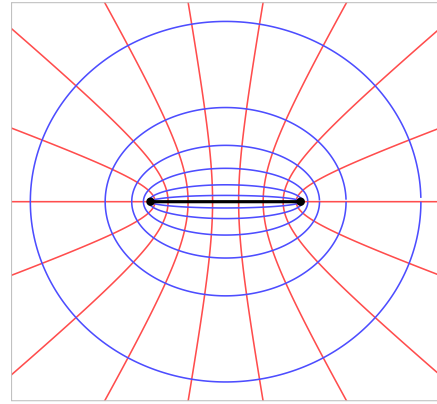
$$D_- = \{z \in \mathbb{E} : \operatorname{Im}[z] < 0\}$$

auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ bijektiv ab. Da J außerdem die Intervalle $(-1, 0) \cup (0, 1)$ auf $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ abbildet, definiert J insgesamt eine konforme Äquivalenz zwischen $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Da $J(z) = J(1/z)$, definiert $z \mapsto J(z)$ eine konforme Äquivalenz vom Ringgebiet $\{|z| > 1\}$ auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ebenso.



(a) $\mathbb{E} \setminus \{0\}$



(b) $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

Figur 6.4: Unter der Joukowski-Abbildung $J(z) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ wird das Ringgebiet $0 < |z| < 1$ auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ konform abgebildet. Dabei gehen Strahlen aus 0 in Hyperbeln und Kreise um 0 in Ellipsen über.

Beispiel 6.20. Die Verkettung von $J(z)$ mit der Möbiustransformation $z \mapsto \varphi(z) = \frac{z+i}{z-i}$ ergibt eine konforme Äquivalenz

$$f = \varphi \circ J : z \mapsto \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1}$$

von der Halbkreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{E} : \operatorname{Im}[z] > 0\}$ auf ganz $\mathbb{E}$.

N.B. Unter der offensichtlichen Abbildung $g : z \mapsto z^2$ wird D nur auf $\mathbb{E} \setminus [0, 1)$ konform abgebildet. Dafür bekommt man mit $f \circ g^{-1}$ eine weitere konforme Äquivalenz $\mathbb{E} \setminus [0, 1) \cong \mathbb{E}$ geschenkt.

Beispiel 6.21. Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a > b$. Die Ellipse

$$x = a \cos(\theta), y = b \sin(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

wird in der komplexen Ebene durch die Gleichung $w = x+iy = \frac{a}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \frac{b}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ beschrieben. Mit $z = e^{i\theta}$ bildet die verallgemeinerte Joukowski-Abbildung

$$f(z) = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2}z^{-1}$$

den Einheitskreis auf die Ellipse bijektiv ab.

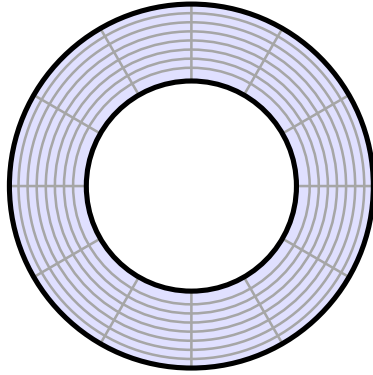
$f(z)$ setzt sich nicht zu einer konformen Abbildung von $\mathbb{E}$ auf das Innere E der Ellipse ab. (Unter anderem, weil f nicht in 0 holomorph ist. Außerdem ist f nicht injektiv, und f nimmt Werte außerhalb der Ellipse an. Dieser Ansatz verspricht nicht viel.) Die Ableitung $f'(z)$ verschwindet genau in den Punkten $\pm \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. Man kann zeigen, dass $f(z)$ das Ringgebiet

$$\mathcal{R} = \left\{ z : \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} < |z| < 1 \right\}$$

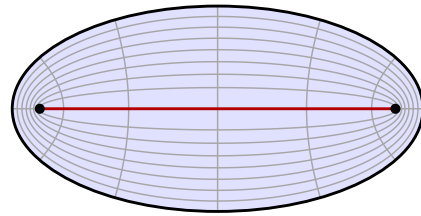
bijektiv auf die geschlitzte Ellipse

$$E = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \setminus [-c, c], \quad c := \sqrt{a^2 - b^2}$$

abbildet. Dabei sind $\pm c$ die Brennpunkte der Ellipse.



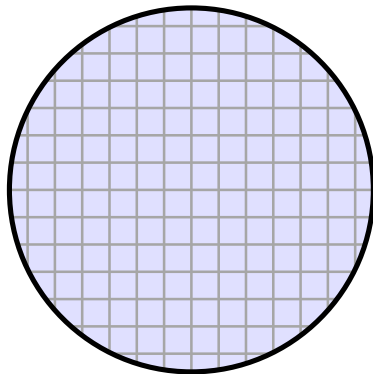
(a) $\mathcal{R}$



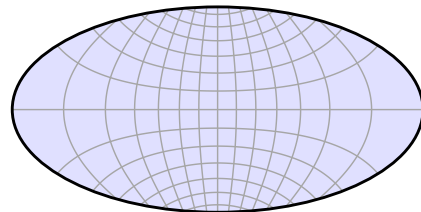
(b) $E \setminus [-c, c]$

Figur 6.5: Unter der Joukowski-Abbildung $J(z) = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2}z^{-1}$ wird das Ringgebiet auf die geschlitzte Ellipse konform abgebildet.

Wir werden später zeigen können, dass die gesamte Fläche der Ellipse zur gesamten Einheitskreisscheibe konform äquivalent ist. Die Äquivalenz kann man mit elementaren Funktionen leider nicht erreichen.



(a) $\mathbb{D}$



(b) E

Figur 6.6: Eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf das Innere einer Ellipse. Diese Abbildung kann nicht mit elementaren Funktionen beschrieben werden.

6.4. Der Satz von Montel

Der Satz von Montel ist ein Kompaktheitssatz für Mengen holomorpher Funktionen, mit dem man Funktionen mit gewissen extremalen Eigenschaften konstruieren kann.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{O}(D)$ der Ring der auf D holomorphen Funktionen.

Definition 6.22. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ heißt **normale Familie**, wenn jede Folge

$$\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \subseteq \mathcal{F}$$

eine Teilfolge

$$f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$$

besitzt, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gegen eine Grenzfunktion gleichmäßig konvergiert.

Definition 6.23. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ holomorpher Funktionen ist **lokal beschränkt**, wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D$ eine Schranke $M > 0$ gibt mit

$$|f(z)| \leq M \text{ für alle } z \in K, f \in \mathcal{F}.$$

Beispiel 6.24. Sei $D = \mathbb{E}$. Die Funktionenfolge $f_n(z) = nz^n$ ist nicht beschränkt auf $\mathbb{E}$, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(2^{-1/n})| = \lim_{n \rightarrow \infty} n/2 = \infty.$$

Dafür ist die Folge (f_n) lokal beschränkt: sei $K \subseteq \mathbb{E}$ kompakt und $\rho = \sup_{z \in K} |z| < 1$. Dann gilt

$$0 \leq \sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq n\rho^n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Lemma 6.25. Sei $\mathcal{F}$ eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen auf D . Seien $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein Radius $\delta > 0$, sodass

$$w, z \in B_\delta(a) \implies |f(w) - f(z)| < \varepsilon \text{ für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Mit anderen Worten: eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist *lokal gleichgradig stetig*.

N.B. Die entsprechende Aussage in der reellen Analysis ist sehr falsch! Die Folge der Funktionen

$$f_n(x) = \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

liefert ein Gegenbeispiel.

Beweis. Sei r so klein, dass D die Kreisscheibe $B_\rho(a)$, $\rho := 2r$ um a enthält. Sei

$$M := \sup_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ z \in B_\rho(a)}} |f(z)|.$$

Seien $w, z \in B_r(a)$. Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel:

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-w} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= \frac{w-z}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)(\zeta-z)} d\zeta. \end{aligned}$$

Dabei ist $|\zeta-w| \geq r$ für $|\zeta-a| = \rho = 2r$ und $|w-a| \leq r$, und analog ist $|\zeta-z| \geq r$. Mit der Standardabschätzung bekommen wir

$$|f(w) - f(z)| \leq \frac{|w-z|}{2\pi} 2\pi\rho \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{2M}{r} \cdot |w-z|, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Wir wählen jetzt $\delta = r \cdot \min(1, \varepsilon/(2M))$ und haben

$$|w-z| < \delta \implies |f(w) - f(z)| < \frac{2M\delta}{r} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Satz 6.26 (Satz von Montel). *Jede lokal beschränkte Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ ist normal.*

Beweis. Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ eine beliebige Folge. Wir konstruieren eine Teilfolge, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig konvergiert:

Sei

$$S := \{x + iy \in D : x, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq D.$$

Dann ist S eine dichte, abzählbare Teilmenge; sei $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ eine beliebige Abzählung. Die Folge $f_1(s_1), f_2(s_1), f_3(s_1), \dots$ ist beschränkt und enthält nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge

$$(f_{n_{1,j}}(s_1))_{j=1}^\infty = f_{n_{1,1}}(s_1), f_{n_{1,2}}(s_1), f_{n_{1,3}}(s_1), \dots$$

Dann ist die Folge $f_{n_{1,1}}(s_2), f_{n_{1,2}}(s_2), f_{n_{1,3}}(s_2), \dots$ ebenso beschränkt und enthält eine konvergente Teilfolge

$$f_{n_{2,1}}(s_2), f_{n_{2,2}}(s_2), f_{n_{2,3}}(s_2), \dots$$

Die Teilfolge $(f_{n_{2,j}})_{j=1}^\infty$ konvergiert also in s_1 und s_2 .

Nach einer Induktion bekommen wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $f_{n_{k,1}}, f_{n_{k,2}}, f_{n_{k,3}}, \dots$

von $f_1, f_2, \dots$, die in den Punkten $s_1, \dots, s_k$ konvergiert. Die Diagonalfolge

$$g_1 = f_{n_{1,1}}, g_2 = f_{n_{2,2}}, g_3 = f_{n_{3,3}}, \dots$$

konvergiert dann in jedem Punkt von S .

Sei jetzt $a \in D$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Nach dem Lemma existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$w, z \in B_\delta(a) \implies |f(w) - f(z)| < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Sei $s \in S \cap B_\delta(a)$ und sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$m > n \geq N \implies |g_m(s) - g_n(s)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Dann haben wir für $z \in B_\delta(a)$:

$$m > n \geq N \implies |g_m(z) - g_n(z)| \leq |g_m(z) - g_m(s)| + |g_m(s) - g_n(s)| + |g_n(s) - g_n(z)| < \varepsilon.$$

Damit hat die Teilfolge $(g_n)_n$ die gleichmäßige Cauchy-Eigenschaft auf $B_\delta(a)$. $\square$

Korollar 6.27 (Konvergenzsatz von Montel). *Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{O}(D)$ eine lokal beschränkte Folge und $f \in \mathcal{O}(D)$. Jede (lokal gleichmäßig) konvergente Teilfolge von $(f_n)_n$ konvergiere gegen f . Dann konvergiert die gesamte Folge $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig gegen f .*

Beweis. Angenommen, $(f_n)_n$ würde nicht lokal gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann finden wir ein Kompaktum $K \subseteq D$, ein $\varepsilon > 0$, und unendlich viele Indizen $n_1, n_2, \dots$ mit $\sup_{z \in K} |f_{n_j}(z) - f(z)| \geq \varepsilon$. Die Teilmenge $(f_{n_j})_j$ ist lokal beschränkt und nach dem Satz von Montel finden wir darin eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Nach Annahme muss diese Teilfolge gegen f konvergieren, ein Widerspruch. $\square$

Korollar 6.28 (Konvergenzsatz von Vitali). *Sei $f_1, f_2, f_3, \dots$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet D , die auf einer Teilmenge $S \subseteq D$ punktweise konvergiert. Angenommen, S besitzt einen Häufungspunkt in D . Dann konvergiert $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig auf ganz D .*

Beweis. Seien f und g die Limiten zweier lokal gleichmäßig konvergenten Teilfolgen von $(f_n)_n$. In jedem Punkt $s \in S$ gilt $f(s) = g(s)$, weil die ganze Folge dort konvergiert. Nach dem Identitätssatz gilt $f \equiv g$ auf D identisch. Nach Korollar 6.27 konvergiert die ganze Folge lokal gleichmäßig auf D . $\square$

6.5. Der Satz von Hurwitz

Der Satz von Hurwitz ist eine Anwendung des Prinzips vom Argument, mit dem man die Injektivität von Grenzfunktionen prüfen kann.

Satz 6.29 (Satz von Hurwitz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Angenommen, jedes f_n ist nullstellenfrei auf D . Dann gilt:*

Entweder ist f nullstellenfrei oder $f \equiv 0$ verschwindet identisch.

N.B. $f \equiv 0$ kann auch vorkommen. Sei zum Beispiel $f_n(z) = e^z/n$.

Beweis. Nach dem Satz von Weierstraß ist f holomorph. Angenommen, $f \not\equiv 0$. Sei $a \in D$ eine Nullstelle und $r > 0$ so klein, dass die punktierte Umgebung $\overline{B_r^\circ}(a)$ keine weiteren Nullstellen von f enthält. Dann haben wir

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ord}(f(z); z = a).$$

Die logarithmischen Ableitungen $\frac{f'_n}{f_n}$ konvergieren auch lokal gleichmäßig (gegen f'/f) auf dem Kreis $|z - a| = r$, denn: Sei

$$\mu := \inf_{|z-a|=r} |f(z)| > 0,$$

und sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\sup_{|z-a|=r} |f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\mu}{2}, \text{ für jedes } n \geq N.$$

Auf dem Kreis $|z - a| = r$ gilt dann

$$|f_n(z)| \geq |f(z)| - |f(z) - f_n(z)| \geq \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2}$$

und damit

$$\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f_n(z)} \right| = \frac{|f(z) - f_n(z)|}{|f_n(z)||f(z)|} \leq \frac{2}{\mu^2} \cdot |f(z) - f_n(z)|.$$

Damit konvergiert die Folge $f_n(z)^{-1}$ gleichmäßig auf $|z - a| = r$ gegen $f(z)^{-1}$. Da $f'_n(z)$ gleichmäßig gegen $f'(z)$ konvergiert (nach dem Satz von Weierstraß), bekommen wir die gleichmäßige Konvergenz von f'_n/f_n .

Wir dürfen deswegen Integral und Limes vertauschen und haben

$$\text{ord}(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz.$$

Aber $\oint_{|z-a|=r} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = 0$ für jedes n , da alle f_n nullstellenfrei sind. Daher gilt auch $\oint_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$, d.h. f ist nullstellenfrei. $\square$

Korollar 6.30. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine Folge konformer Funktionen auf D , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Wenn f nicht konstant ist, dann ist f konform.

Beweis. Sei $a \in D$. Dann ist jede Funktion $f_n(z) - f_n(a)$ auf $D \setminus \{a\}$ nullstellenfrei. Wenn f nicht konstant ist, dann ist auch

$$f(z) - f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(z) - f_n(a))$$

nach dem Satz von Hurwitz auf $D \setminus \{a\}$ nullstellenfrei. Damit ist f injektiv auf D . $\square$

Korollar 6.31. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Wenn f nicht konstant ist, dann gilt

$$f(D) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(D).$$

Beweis. Sei $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(D)$. Dann ist jede Funktion $f_n(z) - a$ nullstellenfrei auf D . Nach dem Satz von Hurwitz ist $f(z) - a$ nullstellenfrei auf D , d.h. $a \notin f(D)$. $\square$

6.6. Der Riemann'sche Abbildungssatz

Satz 6.32 (Riemann'scher Abbildungssatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $D \neq \mathbb{C}$ und $a \in D$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte konforme Äquivalenz

$$\phi : D \xrightarrow{\sim} \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

mit $\phi(a) = 0$ und $\phi'(a) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Die (eindeutig bestimmte) Funktion ϕ heißt **Riemann-Abbildung**.

Die Zahl $r := \frac{1}{\phi'(a)} = \text{rad}(a; D)$ ist der **konforme Radius** von a bzgl. D . Nach der Reskalierung $z \mapsto rz$ ist r dadurch charakterisiert, dass eine konforme Äquivalenz

$$\varphi : D \xrightarrow{\sim} \{z : |z| < r\}$$

mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a) = 1$ existiert.

Dieser Beweis¹ ist nicht konstruktiv. (Wir besprechen nachher das Problem, die Riemann-Abbildung ϕ tatsächlich zu berechnen.)

¹von Ahlfors, *Complex Analysis*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller holomorphen Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{E}$$

mit den Eigenschaften:

- (i) f ist injektiv;
- (ii) $f(a) = 0$;
- (iii) $f'(a) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{F}$ nicht leer ist. (Nur in diesem Schritt verwenden wir $D \neq \mathbb{C}$!) Sei $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$ irgendeine Zahl. Die Funktion $z - \zeta$ ist nullstellenfrei auf dem Elementargebiet D . Also hat $z - \zeta$ eine holomorphe Quadratwurzel:

$$g(z) = \sqrt{z - \zeta}.$$

Die Funktion g hat die Eigenschaft

$$w \in g(D) \implies -w \notin g(D),$$

denn: aus $g(z_1) = -g(z_2)$ ($z_1, z_2 \in D$) folgt

$$z_1 - \zeta = g(z_1)^2 = (-g(z_2))^2 = z_2 - \zeta$$

und damit $z_1 = z_2$. Dann gilt $g(z_1) = -g(z_1) = 0$, ein Widerspruch, da g nullstellenfrei ist.

Nach dem Satz von der offenen Abbildung enthält $g(D)$ eine offene Umgebung von $g(a)$. Insbesondere enthält $\mathbb{C} \setminus g(D)$ eine offene Umgebung von $-g(a)$; sei also $\delta > 0$ so, dass

$$|w + g(a)| < \delta \implies w \notin g(D).$$

Dann gilt für die Funktion

$$h(z) := \frac{1}{g(z) + g(a)}$$

die Abschätzung

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\delta}, \quad z \in D.$$

Die Funktion

$$f(z) := \frac{\delta}{2} \cdot \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \left(h(z) - h(a) \right)$$

ist jetzt (wie g und h) injektiv und erfüllt

$$|f(z)| \leq \frac{\delta}{2} \left(|h(z)| + |h(a)| \right) \leq 1, \quad z \in D,$$

sowie $f(a) = 0$ und $f'(a) = \frac{\delta}{2} |h'(a)| \in \mathbb{R}_{>0}$.

Sei

$$\gamma := \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(a).$$

Dann existiert eine Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(a) = \gamma$. (Auch wenn $\gamma = \infty$ ist.) Da $\mathcal{F}$ eine (lokal) beschränkte Familie ist, kann man nach dem Satz von Montel eine lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ finden, die gegen eine holomorphe Grenzfunktion ϕ konvergiert. (Insbesondere kann $\gamma = \phi'(a)$ doch nicht ∞ gewesen sein.)

Da $\phi'(a) = \gamma > 0$, ist ϕ nicht konstant. Nach dem Satz von Hurwitz muss ϕ auch injektiv sein. Nach einer weiteren Anwendung vom Satz von Hurwitz gilt $\phi(D) \subseteq \mathbb{E}$. Damit ist ϕ ein Element von $\mathcal{F}$.

Jetzt zeigen wir, dass ϕ eine Riemann-Abbildung ist: Angenommen, ϕ wäre nicht surjektiv auf $\mathbb{E}$. Dann ist $\phi(D) \subsetneq \mathbb{E}$ ein Elementargebiet. Sei $w \in \mathbb{E}$ mit $w \notin \phi(D)$; dann ist $w \neq 0$, da $0 = \phi(a) \in \phi(D)$. Die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{E}$, der w als einzige Nullstelle hat; damit ist die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto \frac{\phi(z) - w}{1 - \bar{w}\phi(z)}$$

nullstellenfrei. Nach Annahme existiert eine holomorphe Quadratwurzel

$$h(z) := \sqrt{\frac{\phi(z) - w}{1 - \bar{w}\phi(z)}}.$$

Für diese Funktion gilt $h(a) = \sqrt{-w}$ und

$$2h(a)h'(a) = \frac{d}{dz} \Big|_{z=a} \left(\frac{\phi(z) - w}{1 - \bar{w}\phi(z)} \right) = \gamma(1 - |w|^2),$$

also $h'(a) = \frac{\gamma(1-|w|^2)}{2\sqrt{-w}}$.

Wir normalisieren h mit einer weiteren Möbiustransformation zu der Funktion

$$H : D \longrightarrow \mathbb{E}, \quad H(z) := \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \cdot \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)}h(z)}.$$

Dann ist H wie ϕ und h injektiv, mit $H(a) = 0$ und

$$H'(a) = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2} = \frac{\gamma(1 - |w|^2)}{2\sqrt{|w|}(1 - |w|)} = \gamma \cdot \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} > \gamma.$$

Das widerspricht der Wahl von ϕ .

Die Eindeutigkeit der Riemann-Abbildung folgt aus dem Lemma von Schwarz: Wenn $\phi_1, \phi_2 : D \rightarrow \mathbb{E}$ Riemann-Abbildungen sind, dann ist $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ eine Abbildung, die 0 auf 0 abbildet und in 0 die Ableitung 1 hat. Daher gilt $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = z$, bzw. $\phi_2 = \phi_1$. $\square$

Im Beweis haben wir gezeigt, dass die Riemann-Abbildung eine einfache Charakterisierung hat: unter allen injektiven Abbildungen $\phi : D \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\phi(a) = 0$ ist die Ableitung $\phi'(a)$ maximal.

Bemerkung 6.33. Im Beweis wurde von Elementargebieten nur die Eigenschaft verwendet, dass jede nullstellenfreie holomorphe Funktion eine Quadratwurzel besitzt. Insgesamt haben wir die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften eines Gebiets D :

- (i) D ist homöomorph zu $\mathbb{E}$;
- (ii) D ist einfach zusammenhängend;
- (iii) Jede holomorphe Funktion in D besitzt eine Stammfunktion;
- (iv) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion auf D besitzt einen Logarithmus;
- (v) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion auf D besitzt eine Quadratwurzel;
- (vi) D ist entweder zu $\mathbb{E}$ oder zu $\mathbb{C}$ konform äquivalent.

Denn: (i) $\Rightarrow$ (ii), da einfacher Zusammenhang unter Homöomorphie erhalten bleibt. (ii) $\Rightarrow$ (iii) nach dem Cauchy'schen Integralsatz. (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgt aus Existenz einer Stammfunktion der logarithmischen Ableitung f'/f . (iv) $\Rightarrow$ (v) durch die Konstruktion $\sqrt{f} = \exp(1/2 \cdot \log(f))$. (v) $\Rightarrow$ (vi) haben wir gerade bewiesen. (vi) $\Rightarrow$ (i) folgt aus der Homöomorphie von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$.

Bemerkung 6.34. Dieser Beweis kann nicht konstruktiv gemacht werden (auch nicht numerisch), weil man in einer Familie holomorpher Funktionen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge finden muss. Riemanns Originalbeweis verwendet ein anderes Argument² und ergibt eine Konstruktion von ϕ :

Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ eine Jordan-Kurve, $D = \text{Inn}(C)$ das Innere und $a \in D$.

(1) Sei u eine Lösung der Laplace-Gleichung in D mit Dirichlet-Randbedingungen:

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0, \quad z = (x, y) \in D;$$

$$u(z) = -\log |z - a|, \quad z \in C = \partial D.$$

(2) Sei v die harmonische Konjugierte mit $v(a) = 0$: das heißt, v ist so gewählt, dass die Funktion $f = u + iv$ in D holomorph ist. Die Existenz einer harmonischen Konjugierten ist äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion der holomorphen Funktion

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y.$$

Im Allgemeinen existiert $f(z)$ genau dann, wenn D ein Elementargebiet ist. Die Bedingung $v(a) = 0$ erreichen wir durch Translation um eine Konstante.

(3) Die Funktion

$$\phi(z) := (z - a)e^{f(z)}, \quad f(z) = u(z) + iv(z)$$

ist die Riemann-Abbildung.

²Der Beweis von Riemann setzt die Existenz von Lösungen der Laplace-Gleichung voraus. Das wurde erst durch die Arbeit von Hilbert und Courant gerechtfertigt.

Wenn der Ansatz von Riemann funktioniert, dann muss die Funktion ϕ eine stetige Fortsetzung auf den Rand von D haben. Das ist tatsächlich (für Jordan-Gebiete, also das Innere einer Jordan-Kurve) der Fall. Den Beweis müssen wir aus zeitlichen Gründen überspringen³:

Satz 6.35 (Osgood–Taylor, Carathéodory). *Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ eine Jordan-Kurve und $\phi : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} D := \text{Inn}(C)$ eine konforme Äquivalenz. Dann setzt sich ϕ zu einem Homöomorphismus*

$$\phi : \overline{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \overline{D}$$

fort.

In physikalischen Anwendungen ist man oft eher am Komplement eines Elementargebiets $D \subseteq \mathbb{C}$ interessiert. Das Gebiet D könnte zum Beispiel ein Hindernis sein, um das eine Flüssigkeit herumströmt. Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit kann man als Gradient einer harmonischen Potentialfunktion ϕ ausdrücken, und Harmonizität bleibt unter konformen Abbildungen erhalten.

Korollar 6.36 (Abbildungssatz für Außengebiete). *Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ eine Jordan-Kurve mit Innengebiet $\text{Inn}(C)$ und Außengebiet $\text{Ext}(C)$. Dann existieren eine eindeutig bestimmte Zahl $r > 0$ und eine konforme Äquivalenz*

$$\phi : \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \longrightarrow \text{Ext}(C),$$

deren Laurent-Entwicklung um ∞ die Form

$$\phi(z) = z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots$$

hat.

Die Form der Laurent-Entwicklung von ϕ ist äquivalent zu $\phi(\infty) = \infty$, $\phi'(\infty) = 1$.

Beweis. Nach einer Translation dürfen wir o.B.d.A. $0 \in \text{Inn}(C)$ annehmen. Sei $f(z) = z^{-1}$. Dann ist $E := f(\text{Ext}(C)) \cup \{0\}$ ein Elementargebiet, das nicht ganz $\mathbb{C}$ ist. (E ist nämlich das innere Gebiet der Jordan-Kurve $f(C)$.) Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz existiert eine Zahl $r^{-1} > 0$ und eine eindeutig bestimmte konforme Äquivalenz

$$\psi : \{|z| < r^{-1}\} \xrightarrow{\sim} E$$

mit $\psi(0) = 0$ und $\psi'(0) = 1$. Die gesuchte Abbildung ist

$$\phi(z) = f \circ \psi \circ f(z) = \psi(z^{-1})^{-1}.$$

Die Eindeigkeitsaussage folgt aus der Eindeutigkeit der Riemann-Abbildung ψ . $\square$

³vgl. Burckel, *Classical analysis in the complex plane*, Theorem 9.14

6.7. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein verallgemeinerter Kreis, d.h. Γ ist ein Kreis oder eine Gerade. In den Hausaufgaben wurde gezeigt, dass Möbiustransformationen kreistreu sind, d.h. verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbilden.

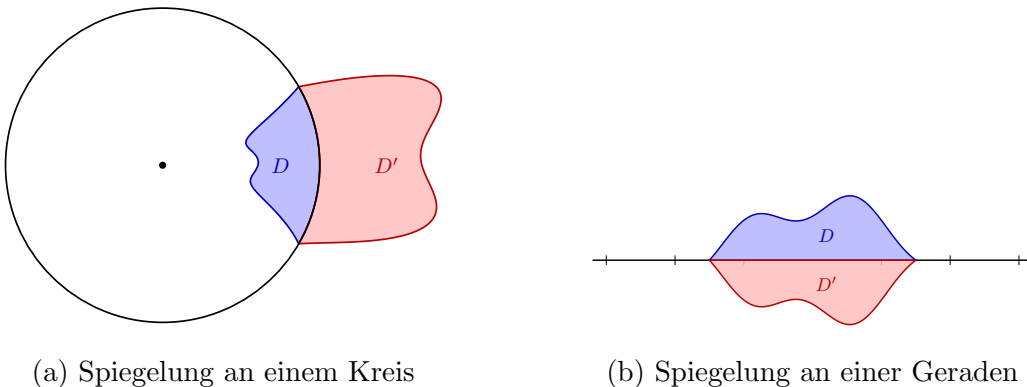
Die Spiegelung an einer Geraden ℓ ist aus der Schulmathematik bekannt. Im Komplexen kann man die Spiegelung $z \mapsto z^*$ als eindeutige affin-antilineare Abbildung charakterisieren,

$$z^* = a\bar{z} + b, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

für die $|z^* - w| = |z - w|$ für jeden Punkt $w \in \ell$ gilt. Eine analoge Definition gibt es für Kreise: Sei $K = \{z : |z - c|^2 = r^2\}$ der Kreis mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$. Dann heißen zwei Punkte $z, z^* \in \mathbb{C}$ **symmetrisch** (bzgl. K), wenn

$$(z - c) \cdot \overline{(z^* - c)} = r^2.$$

Die Abbildung $z \mapsto z^*$ ist die **Spiegelung** an K . Der Punkt z^* ist eindeutig dadurch bestimmt, dass c, z, z^* auf einer Geraden liegen und dass das Produkt der Abstände $|c - z|$ und $|c - z^*|$ gleich r^2 ist.



Figur 6.7: Ein Gebiet D mit Spiegelgebiet D' .

Beispiel 6.37. Sei $K = \{|z| = 1\}$ der Einheitskreis. Das Spiegelbild von $z \in \mathbb{C}$ ist $z^* = z/|z|^2 = \bar{z}^{-1}$. (Außerdem setzt man $0^* = \infty$ und $\infty^* = 0$.)

Seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$ beliebige Punkte, die bzgl. K symmetrisch liegen, mit a im Inneren des Kreises. Da a, b, c auf einer Geraden liegen und c nicht zwischen a und b liegt, kann man c in der Form

$$c = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t < 0$$

schreiben. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\lambda \neq 1$ die eindeutige Zahl mit $1 - t = \frac{1}{1 - \lambda^2}$. Dann kann man K äquivalent durch die Gleichung

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \lambda$$

beschreiben. Im Ausnahmefall $\lambda = 1$ beschreibt die Kurve

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 1$$

eine Gerade; auch in diesem Fall ist $b = a^*$ die Spiegelung an der Geraden.

Satz 6.38 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip). *Sei K ein verallgemeinerter Kreis. Sei $D \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ ein Gebiet, dessen Abschluss ein Teilbogen K_0 von K enthält, und sei $f : D \cup K_0 \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, für die $f|_D$ holomorph ist. Es gebe einen weiteren verallgemeinerten Kreis C , sodass $f(z) \in C$ für alle Punkte $z \in K_0$ gilt. Sei z' die Spiegelung von z an K und z^* die Spiegelung von z an C . Dann besitzt f eine holomorphe Fortsetzung in das gespiegelte Gebiet*

$$D' = \{z' : z \in D\}$$

und es gilt

$$f(z') = f(z)^*, \quad z \in D.$$

Insbesondere gilt: sind z_1, z_2 symmetrisch bzgl. K , dann sind $f(z_1), f(z_2)$ symmetrisch bzgl. C .

Beweis. Seien φ_K und φ_C Möbiustransformationen, die die (verallgemeinerten) Kreise K bzw. C auf die reelle Achse $\mathbb{R}$ abbilden. (Dazu genügt es, auf K bzw. auf C drei beliebige paarweise verschiedene Punkte zu wählen und sie mit einer Möbiustransformation auf irgendwelche reelle Zahlen abzubilden. Wegen der Kreistreue von φ_K und φ_C ist das Bild genau $\mathbb{R}$.) Die Konjugation

$$\tilde{f} := \varphi_C \circ f \circ \varphi_K^{-1}$$

ist dann auf $\varphi_K(D)$ definiert und besitzt eine stetige Fortsetzung auf $\varphi_K(K_0) \subseteq \mathbb{R}$, und nimmt dort nur reelle Werte an.

Nach einer Übungsaufgabe hat $\tilde{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf das gespiegelte Gebiet $\overline{\varphi_K(D)}$, die durch

$$\tilde{f}(\bar{z}) = \overline{\tilde{f}(z)}, \quad z \in \varphi_K(D)$$

gegeben ist. Damit bekommt man die holomorphe Fortsetzung von $f = \varphi_C^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_K$. $\square$

Das Spiegelungsprinzip ist besonders interessant wenn der Rand des Gebietes D aus endlich vielen Kreisbögen und Geraden besteht (z.B. Polygone), weil man dann das Prinzip wiederholt anwenden kann.

Beispiel 6.39. Die Abbildung $f(z) = z \mapsto e^z$ ist bekanntlich ein konformer Isomorphismus von dem Streifengebiet

$$D = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi\}$$

auf die obere Halbebene. Dabei setzt sich f auf $\overline{D}$ stetig fort, und f bildet die Randgeraden $z = x$ und $z = x + \pi i$ auf $\mathbb{R}$ ab. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip setzt sich e^z in beiden Richtungen auf die benachbarte Streifen holomorph fort. Die Spiegelung von $z \in D$ an die Gerade $\text{Im}[z] = \pi$ ist dabei

$$z' = (x + iy)' = x + i(2\pi - y) = 2\pi i + \bar{z},$$

und nach dem Spiegelungsprinzip gilt für die Fortsetzung in $D' = \{\pi < y < 2\pi\}$:

$$e^{2\pi i + \bar{z}} = f(z') = \overline{f(z)} = \overline{e^z}.$$

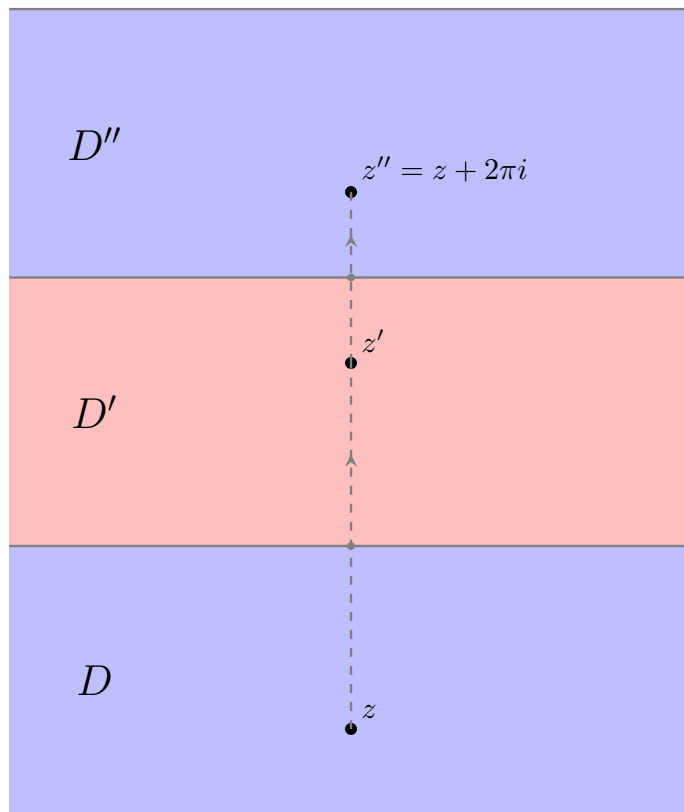
Wir spiegeln z' jetzt an der Geraden $\text{Im}[z] = 2\pi$ und bekommen

$$z'' = 4\pi i + \bar{z}' = 2\pi i + z.$$

Nach dem Spiegelungsprinzip gilt

$$e^{2\pi i + z} = f(z'') = \overline{\overline{f(z)}} = f(z) = e^z.$$

Das heißt: $\exp$ ist periodisch!



Figur 6.8: Wiederholte Spiegelungen eines Streifengebiets

Beispiel 6.40. Seien $\omega_1, \omega_2 > 0$ und sei R das Rechteck

$$R = \{z = x + iy : 0 < x < \omega_1, 0 < y < \omega_2\}.$$

Sei $\varphi : R \rightarrow \mathbb{E}$ ein konformer Isomorphismus. Dann setzt sich φ wieder zu einem Homöomorphismus von ∂R auf den Einheitskreis stetig fort.

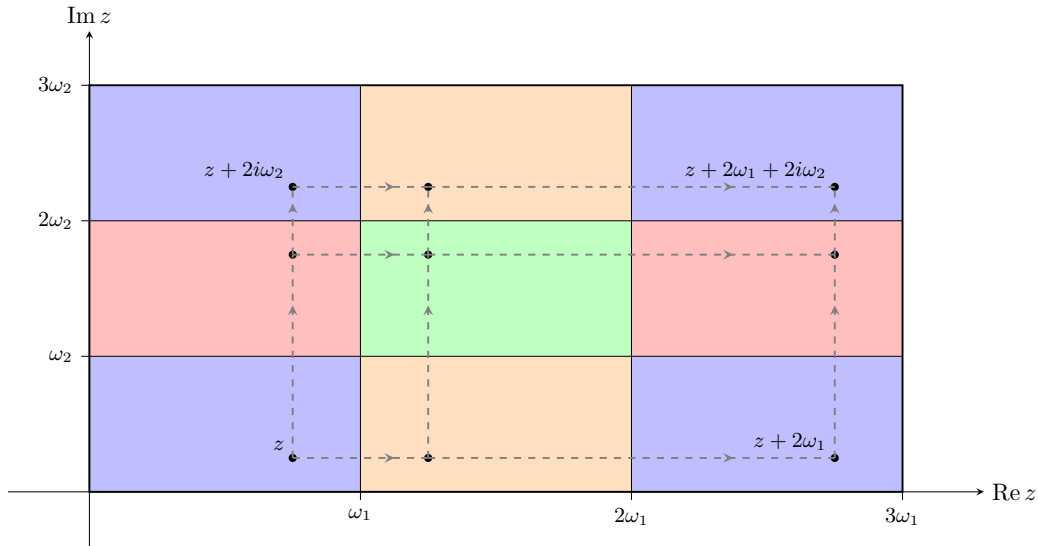
Durch die wiederholte Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips bekommt φ eine *meromorphe* Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$, mit der folgenden Eigenschaft: sind z, z' Spiegelbilder unter der Spiegelung an der Seite eines der Rechtecke, dann gilt

$$\varphi(z') = \overline{\varphi(z)^{-1}}.$$

Da die Translationen $z \mapsto z + 2\omega_1$ und $z \mapsto z + 2i\omega_2$ durch zweimaliges Spiegeln erreicht werden, gilt:

$$\varphi(z + 2\omega_1) = \varphi(z + 2i\omega_2) = \varphi(z).$$

φ ist daher eine **doppelt periodische** (oder **elliptische**) Funktion.



Figur 6.9: Spiegelungen eines Rechtecks. Zwei Spiegelungen in dieselbe Richtung ergeben eine Translation.

Eine weitere Anwendung ist die Klassifikation von Ringgebieten bis auf konforme Äquivalenz. Mit $A(r, R)$ bezeichnen wir das Ringgebiet

$$A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Proposition 6.41. Seien $0 < r_1 < R_1 < \infty$ und $0 < r_2 < R_2 < \infty$ Radien.

Dann sind äquivalent:

- (i) Es gibt eine konforme Äquivalenz $A(r_1, R_1) \cong A(r_2, R_2)$;
- (ii) $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Dieser Satz ist wichtig in der Klassifikation von *zweifach zusammenhängenden* Gebieten, d.h. Gebiete $D \subsetneq \mathbb{C}$, dessen Komplement genau eine beschränkte Zusammenhangskomponente enthält. Jedes solche Gebiet ist konform äquivalent zu genau einem der Gebiete $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ oder $A(1, r)$ mit einem eindeutig bestimmten Radius $r > 1$.⁴

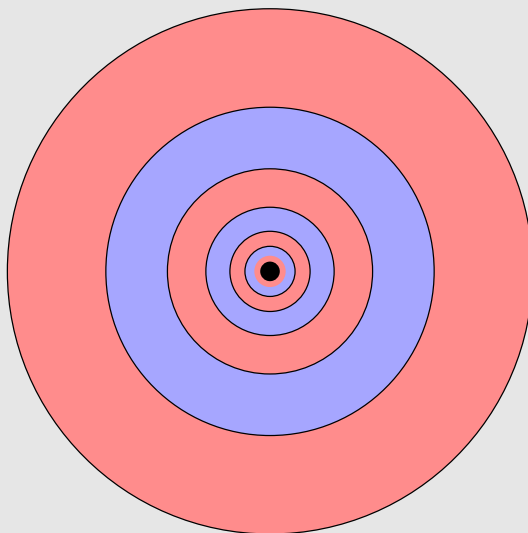
Beweis. Im Fall $R_1/r_1 = R_2/r_2$ funktioniert eine Reskalierung

$$f(z) = C \cdot z, \quad C = \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Das beweist (ii) $\Rightarrow$ (i).

Sei umgekehrt $f : A(r_1, R_1) \rightarrow A(r_2, R_2)$ eine konforme Äquivalenz. Dann setzt sich f stetig auf die Randkreise $|z| = r_1$ und $|z| = R_1$ fort (die Laurent-Reihe von f konvergiert auch dort) und die Kreise werden in die Kreise $|z| = r_2$ und $|z| = R_2$ abgebildet (nach Maximumprinzip).

Jetzt setzt sich f mit dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip unendlich oft auf die benachbarten Ringgebiete fort (vgl. Abbildung).



Für jedes k ist die Fortsetzung von f dann eine konforme Abbildung

$$f : A(r_1 \cdot \lambda^k, R_1 \cdot \lambda^k) \xrightarrow{\sim} A(r_2 \cdot \mu^k, R_2 \cdot \mu^k), \quad \lambda = \frac{R_1}{r_1}, \quad \mu = \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{\pm 1}.$$

(Das Vorzeichen im Exponenten ist ± 1 , je nachdem, ob f den Kreis $|z| = r_1$ auf $|z| = r_2$ oder $|z| = R_2$ abbildet. Im Limes setzt sich f zu einer konformen Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

⁴vgl. Burckel, *Classical analysis in the Complex Plane*, Chapter X.

fort. Nach einer Übungsaufgabe muss f von der Form

$$f(z) = cz \quad \text{oder} \quad f(z) = cz^{-1}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}^\times$ sein. Aber eine Abbildung dieser Form bildet die Kreise $|z| = r_1$ und $|z| = R_1$ nur dann auf $|z| = r_2$ und $|z| = R_2$ ab, wenn $R_2/r_2 = R_1/r_1$. (f ist nämlich von der Form

$$f(z) = \frac{r_2}{r_1} \zeta z \quad \text{oder} \quad f(z) = r_1 R_2 \zeta z^{-1}$$

mit $|\zeta| = 1$.)

□

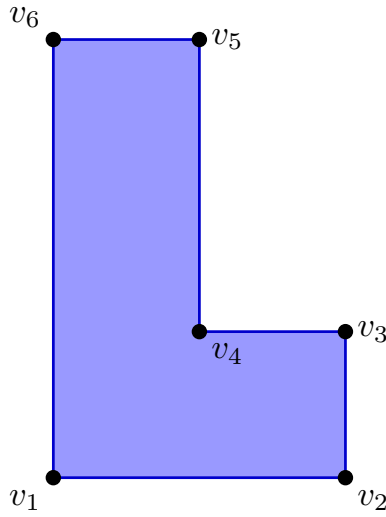
6.8. Die Schwarz–Christoffel-Formel

Sei $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1} = v_1$ ein Streckenzug ohne Selbstüberschneidungen, und P das offene Polygonebiet, das von diesen Strecken umrandet wird. Als Elementargebiet existiert ein konformer Isomorphismus

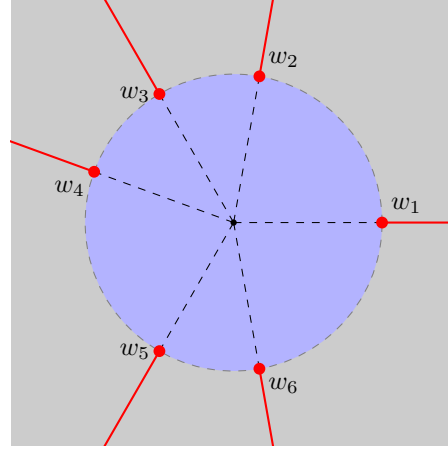
$$\psi : P \xrightarrow{\sim} \mathbb{E},$$

der bis auf Verkettung mit einem Automorphismus von $\mathbb{E}$ eindeutig bestimmt ist. Die Schwarz–Christoffel-Formel beschreibt die Umkehrfunktion $\varphi = \psi^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow P$.

Nach dem Abbildungssatz von Carathéodory setzt sich φ zu einem Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{E}}$ auf $\overline{P}$ fort. Insbesondere existieren Punkte $w_1 = e^{i\theta_1}, \dots, w_n = e^{i\theta_n}$ auf dem Einheitskreis mit $\psi(v_k) = w_k$. Diese Punkte bestimmen eine Zerlegung von $\mathbb{E}$ in Sektoren; da φ den Bogen zwischen w_k und w_{k+1} auf einen Geradenabschnitt abbildet, kann φ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip auf die Spiegelgebiete der Sektoren holomorph fortgesetzt werden. Das Holomorphiegebiet von φ ist also die n -mal geschlitzte Ebene entlang Geraden, die das Außengebiet des Einheitskreises in Sektoren aufteilen.



(a) Die z -Ebene: P



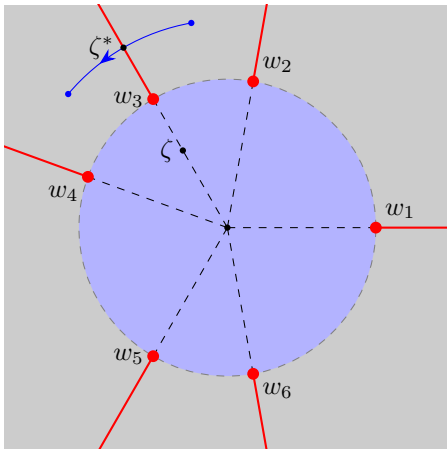
(b) Die w -Ebene: $\mathbb{E}$ und Spiegelgebiete

Figur 6.10: Analytische Fortsetzung der Umkehrfunktion $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow P$

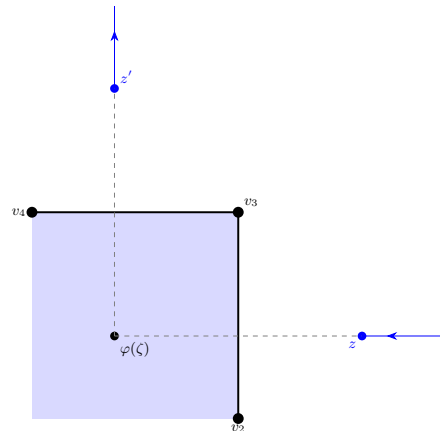
φ ist nicht stetig auf den Schnitten. Sei nämlich $\bar{\zeta}^{-1}$, das Spiegelbild von $\zeta \in \mathbb{E}$, ein Punkt auf dem Schnitt aus w_k . Im Limes $w \rightarrow \bar{\zeta}^{-1}$ konvergiert $\varphi(w)$, je nach Sektor, gegen eine der Spiegelungen von $\varphi(\zeta)$ an eine der an v_k angrenzenden Polygonseiten. Die Komposition von zwei Spiegelungen ist eine affin-lineare Rotation um $2\alpha_k$ der Form

$$z \mapsto e^{2i\alpha_k} z + b,$$

wenn α_k der Innenwinkel des Polygons an v_k ist. Beim Durchgang durch den Schnitt geht $\varphi(w) - v_k$ sprunghaft in $e^{2i\alpha_k}(\varphi(w) - v_k)$ über.



(a) Die w -Ebene



(b) Die z -Ebene

Figur 6.11: Ein Weg durch einen Verzweigungsschnitt und der Bildweg unter φ . z und z' sind die zwei Bilder von $\zeta^* = \bar{\zeta}^{-1}$ unter φ .

Dann geht durch den Verzweigungsschnitt auch φ' in $e^{2i\alpha_k}\varphi'$ über. Als nullstellenfreie Funktion auf einem Elementargebiet besitzt φ' einen Logarithmus. (Auf $\mathbb{E}$ ist φ' nullstellenfrei, da φ konform ist. Auf den Bögen zwischen w_k und w_{k+1} ist φ' nullstellenfrei, da φ den Kreisbogen homöomorph auf einen Geradenabschnitt abbildet. Außerhalb von $\overline{\mathbb{E}}$ ist φ' durch das Spiegelungsprinzip bestimmt.) Beim Durchgang durch den Verzweigungsschnitt geht $\log \varphi'$ in $2i\alpha_k + \log \varphi'$ über. Daher haben wir:

Lemma 6.42. *Die logarithmische Ableitung*

$$\frac{d}{dw} \log \varphi'(w) = \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$$

besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$ mit isolierten Singularitäten in den Punkten $w_1, \dots, w_n$.

Die Singularitäten von $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ können wir genau beschreiben: Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ und

$$h(w) = (\varphi(w) - v_k)^{\pi/\alpha_k}, \quad w \in \mathbb{E}$$

ein holomorpher Zweig der Wurzel auf $\mathbb{E}$. (Die Funktion $\varphi(w) - v_k$ ist nämlich nullstellenfrei.) Dann setzt sich h nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip auf die Sektoren neben dem Schnitt holomorph fort, und beim Durchgang durch den Schnitt haben wir die Transformation

$$h(w) \implies \left(e^{2i\alpha_k} (\varphi(w) - v_k) \right)^{\pi/\alpha_k} = e^{2\pi i} (\varphi(w) - v_k)^{\pi/\alpha_k} = h(w).$$

Die Funktion h hat also eine stetige Fortsetzung und eine *hebbare Singularität* in w_k . Nach Konstruktion gilt $h(w_k) = 0$, und wegen der konformen Eigenschaft von φ ist diese Nullstelle von h einfach.

Sei also

$$\begin{aligned} h(w) &= c_1(w - w_k) + c_2(w - w_k)^2 + c_3(w - w_k)^3 + \dots \\ &= c_1(w - w_k) \cdot \left(1 + c_2/c_1(w - w_k) + c_3/c_1(w - w_k)^2 + \dots \right), \quad |w - w_k| < \varepsilon, \end{aligned}$$

die Entwicklung von $h(w)$ um w_k als Potenzreihe. Dann gilt auf dem Komplement von dem Verzweigungsschnitt:

$$\varphi(w) = v_k + C(w - w_k)^{\alpha_k/\pi} \left(1 + a_1(w - w_k) + a_2(w - w_k)^2 + \dots \right), \quad |w - w_k| < \varepsilon$$

mit Koeffizienten $C, a_k \in \mathbb{C}$, $C \neq 0$. Für $\varphi''(w)/\varphi'(w)$ erhalten wir die Laurent-Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} &= \frac{C(\alpha_k/\pi)(\alpha_k/\pi - 1)(w - w_k)^{\alpha_k/\pi - 2}(1 + \dots)}{C(\alpha_k/\pi)(w - w_k)^{\alpha_k/\pi - 1}(1 + \dots)} \\ &= \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1 \right) (w - w_k)^{-1} + b_0 + b_1(w - w_k) + \dots, \quad b_k \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die Singularität von $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ in w_k ist also ein einfacher Pol, mit Residuum

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}, w = w_k\right) = \frac{\alpha_k}{\pi} - 1.$$

Als letztes Hilfslemma brauchen wir das Verhalten in ∞ :

Lemma 6.43. *Die Funktion $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ ist holomorph in ∞ , mit*

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = 0.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = 0$$

innerhalb der Sektoren der w -Ebene gilt. Dafür setzen wir das Spiegelungsprinzip ein: aus

$$\varphi(1/w) = a \cdot \overline{\varphi(\overline{w})} + b$$

bekommen wir

$$-\frac{1}{w^2} \varphi' \left(\frac{1}{w} \right) = a \cdot \overline{\varphi'(\overline{w})},$$

und nach Bilden der logarithmischen Ableitungen

$$-\frac{2}{w} - \frac{\varphi''(1/w)}{w^2 \varphi'(1/w)} = \frac{\overline{\varphi''(\overline{w})}}{\varphi'(\overline{w})},$$

also

$$\frac{\varphi''(1/w)}{\varphi'(1/w)} = -2w - w^2 \frac{\overline{\varphi''(\overline{w})}}{\varphi'(\overline{w})}.$$

Im Limes $w \rightarrow 0$ bekommen wir

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\varphi''(1/w)}{\varphi'(1/w)} = 0. \quad \square$$

Das beweist die Schwarz–Christoffel-Formel:

Satz 6.44. *Für jede konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow P$ mit $\varphi(w_k) = v_k$ gilt die Formel*

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1 \right) \cdot \frac{1}{w - w_k}.$$

Denn $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ ist eine meromorphe Funktion mit einfachen Polstellen genau in den $w = w_k = \varphi^{-1}(v_k)$, mit den gegebenen Residuen, und eine Nullstelle in ∞ . Das bestimmt $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ als rationale Funktion eindeutig.

Wir haben also

$$\log \varphi'(w) = \text{const} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1 \right) \log(w - w_k),$$

also

$$\varphi'(w) = \text{const} \cdot \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\alpha_k/\pi - 1},$$

also

$$\varphi(w) = C_1 + C_2 \int_0^w \prod_{k=1}^n (\zeta - w_k)^{\alpha_k/\pi - 1} d\zeta$$

mit irgendwelchen Konstanten C_1, C_2 .

Bemerkung 6.45. Für konforme Abbildungen $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow P$ von der oberen Halbebene nach P gilt eine sehr ähnliche Formel:

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1 \right) \cdot \frac{1}{w - x_k},$$

also

$$\varphi'(w) = C \cdot \prod_{k=1}^n (w - x_k)^{\alpha_k/\pi - 1}.$$

Hier sind allerdings $x_k = \varphi^{-1}(v_k) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Im Fall $x_k = \infty$ ist der Faktor $(w - x_k)$ einfach wegzulassen.

Beweis: Man schreibe

$$\varphi = \psi \circ \varphi_C$$

mit der Cayley-Transformation

$$\varphi_C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad w \mapsto \frac{w - i}{w + i}$$

und einer konformen Abbildung $\psi : \mathbb{E} \rightarrow P$. Dann ist

$$\varphi'(w) = \psi'(\varphi_C(w)) \varphi'_C(w) = \psi' \left(\frac{w - i}{w + i} \right) \cdot \frac{2i}{(w + i)^2}.$$

Man setzt die Formel

$$\psi'(w) = C \cdot \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\alpha_k/\pi - 1}$$

ein und bekommt

$$\begin{aligned}\varphi'(w) &= \frac{2i}{(w+i)^2} \cdot C \prod_{k=1}^n \left(\frac{w-i}{w+i} - w_k \right)^{\alpha_k/\pi-1} \\ &= \frac{2i}{(w+i)^2} \cdot C \prod_{k=1}^n \left(\frac{w(1-w_k) - i(1+w_k)}{w+i} \right)^{\alpha_k/\pi-1}.\end{aligned}$$

Falls $w_k \neq 1$, schreiben wir

$$\frac{w(1-w_k) - i(1+w_k)}{w+i} = (w-x_k) \cdot \frac{1-w_k}{w+i}, \quad x_k = i \frac{1+w_k}{1-w_k} \in \mathbb{R};$$

sonst schreiben wir

$$\frac{w(1-w_k) - i(1+w_k)}{w+i} = \frac{-2i}{w+i}.$$

Dann haben wir

$$\varphi'(w) = 2iC \prod_{x_k \neq \infty} (w-x_k)^{\alpha_k/\pi-1} \cdot \frac{1}{(w+i)^{2+\sum_k(\alpha_k/\pi-1)}} \cdot \prod_{k=1}^n (1-w_k)^{\alpha_k/\pi-1}.$$

Der Term $(w+i)^{2+\sum_k(\alpha_k/\pi-1)}$ verschwindet, da $2+\sum_k(\alpha_k/\pi-1) = 0$ für jedes Polygon ist, und es bleibt der Ausdruck

$$\varphi'(w) = \text{const} \times \prod_{x_k \neq \infty} (w-x_k).$$

Beispiel 6.46. Sei P ein Rechteck:

$$P = \{x + iy : 0 < x < \omega_1, 0 < y < \omega_2\}.$$

Die Innenwinkel von P sind $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = \frac{\pi}{2}$. Jeder konforme Isomorphismus $\psi : P \rightarrow \mathbb{E}$ hat nach der Schwarz–Christoffel-Formel eine Umkehrfunktion der Form

$$\varphi(w) = C_1 + C_2 \int_0^w \frac{1}{\sqrt{(\zeta-w_1)(\zeta-w_2)(\zeta-w_3)(\zeta-w_4)}} d\zeta, \quad |w_1| = \dots = |w_4| = 1.$$

Umgekehrt entspricht jede solche Schwarz–Christoffel-Funktion eine konforme Abbildung von $\mathbb{E}$ auf ein Rechteck. Dabei bestimmt die Konstante C_1 eine Translation; die Konstante C_2 eine Drehstreckung; und nach der Verkettung mit einer geeigneten Möbiustransformation in $\text{Aut}(\mathbb{E})$ kann man drei der Punkte w_k auf drei beliebige Punkte auf dem Einheitskreis abbilden, etwa $1, i, -1$. Der übrige Parameter w_4 bestimmt eindeutig das Seitenverhältnis ω_2/ω_1 . Diese letzte Abhängigkeit ist allerdings kompliziert.

Im Fall $w_1, w_2, w_3, w_4 = 1, i, -1, -i$ erhalten wir mit $C_2 = \sqrt{-1}$ eine konforme Abbildung

$$\varphi(w) := \int_0^w \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}} d\zeta$$

von $\mathbb{E}$ auf das Innengebiet von einem Quadrat. Die Eckpunkte des Quadrats sind dabei

$$v_1 = \varphi(1) = K := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \approx 1,311$$

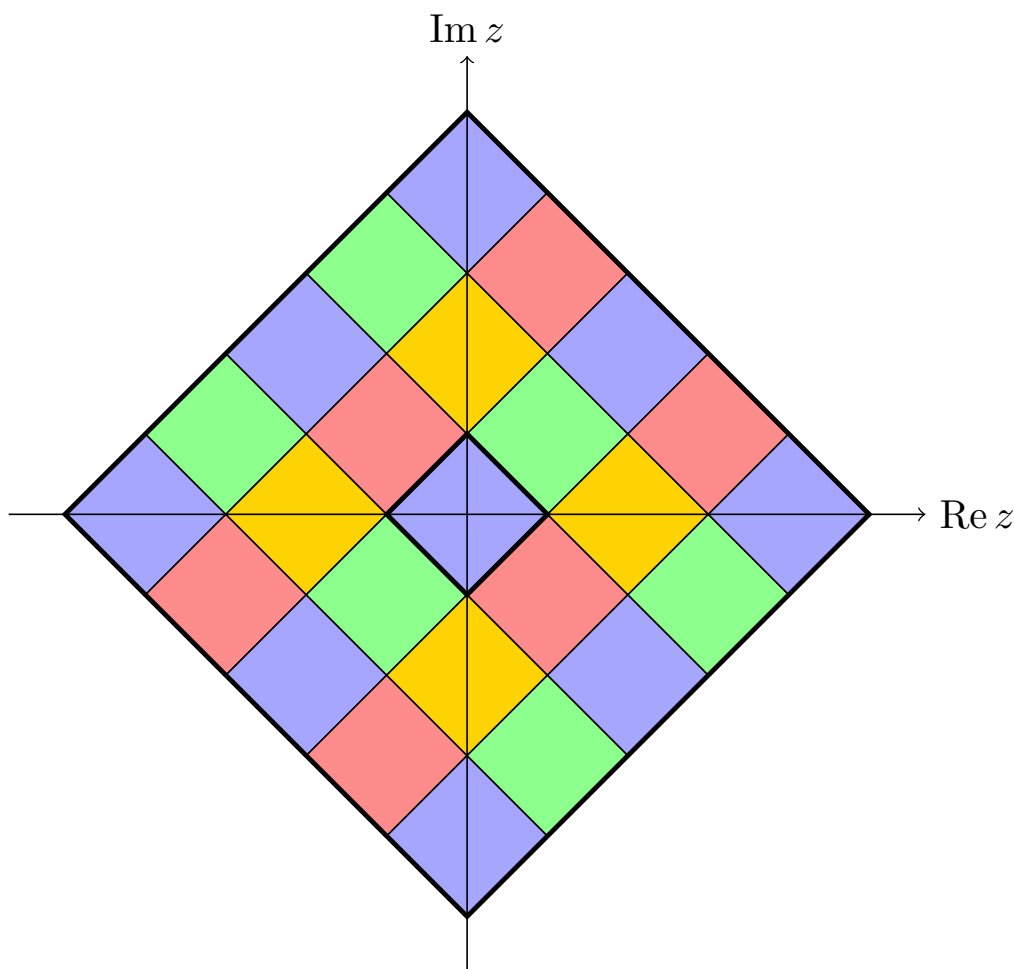
und $v_2 = \varphi(i) = iK$; $v_3 = \varphi(-1) = -K$; $v_4 = \varphi(-i) = -iK$.

Zusammen mit den Erkenntnissen vom letzten Abschnitt bekommen wir ein wichtiges Ergebnis, das schon auf Gauß zurückgeht: Das elliptische Integral

$$\int_0^w \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}} d\zeta$$

ist die Umkehrfunktion einer Funktion $\text{sl}(z)$ („sinus lemniscatus“), die eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ zu einer doppelt periodische Funktion besitzt:

$$\text{sl}(z + 2(1+i)K) = \text{sl}(z) = \text{sl}(z + 2(1-i)K).$$



Figur 6.12: Die elliptische Funktion $\text{sl}(z)$.

Bemerkung 6.47. Die Schwarz–Christoffel-Formel bleibt für unbeschränkte Polygone mit ∞ als Eckpunkt richtig. Der „Innenwinkel“ in ∞ muss dabei so gewählt sein, dass die Summe aller Innenwinkel gleich $(n - 2)\pi$ ist, wenn n die Anzahl der Eckpunkte bezeichnet. Wir geben gleich einige Beispiele an:

Beispiel 6.48. (i) Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ kann man mit etwas Fantasie als Innengebiet eines 1-Ecks mit Eckpunkt ∞ und Innenwinkel $-\pi$ auffassen. Nach der Schwarz–Christoffel-Formel müsste man eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$ mit

$$\varphi'(w) = \text{const} \cdot (w - 1)^{-2}$$

finden können, die 1 auf ∞ abbildet. Es gibt in der Tat die Cayley-Transformation

$$\varphi(w) = i \frac{1 + w}{1 - w}.$$

(ii) Das Winkelgebiet $D = \{z = re^{i\theta} : 0 < \theta < \alpha, r > 0\}$ ist das Innengebiet eines 2-Ecks mit Eckpunkten 0 und ∞ und Innenwinkel jeweils α und $-\alpha$. Sei $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow D$ eine konforme Abbildung, die 0 auf 0 und ∞ auf ∞ abbildet. Dann gilt

$$\varphi'(w) = \text{const} \cdot w^{\alpha/\pi - 1},$$

also

$$\varphi(w) = C_1 + C_2 w^{\alpha/\pi}.$$

In der Tat ist $\varphi(w) = w^{\alpha/\pi}$ der bekannte Isomorphismus von $\mathbb{H}$ auf D .

(iii) Der Halbstreifen

$$P = \{z = x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2, 0 < y\}$$

kann man als Dreieck mit Eckpunkten $-\pi/2, \pi/2, \infty$ und Innenwinkel $\pi/2, \pi/2, 0$ auffassen. Für den (eindeutig bestimmten) konformen Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow P \quad \text{mit } \varphi(-1) = -\frac{\pi}{2}, \varphi(1) = \frac{\pi}{2}, \varphi(\infty) = \infty$$

gilt

$$\varphi'(w) = \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}},$$

also

$$\varphi(w) = C_1 + C_2 \arcsin(w)$$

mit geeigneten Konstanten C_1, C_2 . Aus $\varphi(-1) = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$ folgt $\varphi(w) = \arcsin(w)$. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}(z) = \sin(z)$ definiert damit einen konformen Isomorphismus von P auf $\mathbb{H}$.